UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA

Departamento de Filosofía, Lógica y Estética

Doctorado en Filosofía

Tesis Doctoral

Una expansión implicativa de la matriz tetravaluada de Belnap: Una lógica modal tetravaluada carente de las paradojas modales fuertes tipo Łukasiewicz

Directora:
Gemma Robles Vázquez
Tutor:
José Manuel Méndez Rodríguez

Autor:
José Miguel Blanco Sánchez

Resumen

Hacia el final de su vida el gran lógico polaco J. Łukasiewicz desarrollaría el sistema modal tetravaluado conocido como Ł. Este sistema verificaba tesis como $(MA \wedge MB) \rightarrow M(A \wedge B)$ ó $L(A \vee B) \rightarrow (LA \vee LB)$, enclavadas dentro de las paradojas modales fuertes tipo Łukasiewicz. El sistema fue ampliamente criticado por la verificación de dichas tesis. Por otra parte, en [Brady, 1982], R. T. Brady presenta la lógica relevante BN4, una versión tetravaluada del clásico sistema del condicional relevante R. Con ambos antecedentes, el objetivo de la presente investigación pasa por desarrollar un sistema que actúe como *compañero* de BN4 tal y como E lo es con respecto a R y que carezca de las paradojas que asolan el sistema de Łukasiewicz. Para ello, en primer lugar, definiremos la matriz M4, que servirá como base para los sistemas que posteriormente desarrollaremos. Una vez definida la matriz daremos dos semánticas distintas: la semántica tetravaluada intrínseca a la matriz y una semántica bivalente tipo Belnap-Dunn, demostrando que las dos semánticas son equivalentes. Posteriormente definiremos un sistema basado en FDE al que llamaremos FDF4. Daremos para este sistema pruebas de corrección, completud y probaremos que surge de la matriz M4. Adicionalmente definiremos un sistema con E como base al que denominaremos EF4, para el que también daremos pruebas de corrección, completud y además probaremos que se trata de una axiomatización de la matriz M4, todo ello apoyándonos en el hecho de tratarse de un sistema equivalente a FDF4. Con respecto a EF4 desarrollaremos dos modalidades distintas: Una a través de las extensiones interdefinicionales de Łukasiewicz que, en este caso, resulta equivalente a la modalidad inherente a E, y otra basada en la propuesta de J. Y. Beziau que entronca con la propuesta de J. M. Font y M. Rius, a su vez ligada a la tradición de los algebristas portugueses encabezados por A. Monteiro. De esta manera definiremos dos sistemas modales diferentes, EF4-M y EF4-Ł. Para el primero daremos una única axiomatización, como es habitual, mientras que para el segundo daremos cuatro axiomatizaciones distintas. Para cada uno de ellos, EF4-M y EF4-Ł, desarrollaremos tanto una prueba de corrección como de completud. En último término, desarrollaremos tanto una semántica relacional ternaria de modelos reducidos, como una semántica relacional ternaria basada en 2 set-up para EF4, ofreciendo, de nuevo, pruebas de corrección y completud con respecto a ambas. Para concluir, probaremos que FDF4 es también correcto y completo con respecto a las semánticas relacionales que hemos definido y probaremos que la semántica de 2 set-up es un caso particular de la semántica de modelos reducidos.

Abstract

Towards the end of his life, the great Polish logician J. Łukasiewicz developed the fourth-valued modal system known as Ł. This system validated theses as $(MA \wedge MB) \rightarrow M(A \wedge B)$ or $L(A \vee B) \rightarrow (LA \vee LB)$, which are part of what it is known as strong modal Łukasiewicz-type paradoxes. Because of this, this system was strongly criticized. On the other hand, in [Brady, 1982], R. T. Brady presents his relevant logic BN4, a fourth-valued version of the relevant implication system R. Taking this background into account, the main goal of this research is to build a system that works as a companion of BN4 (just like E does with respect to R) and lacks the paradoxes that can be found in Łukasiewicz's system. Firstly, we define the matrix M4, which is the base for all the systems that we develop later. We then introduce two different semantics, i.e., the fourth-valued semantics related to the matrix and a bivalent Belnap-Dunn type semantics, and we show that both semantics are equivalent. Next, the system that we have labeled FDF4, which is based on FDE, is defined. We prove that this system is both sound and complete in the strong sense and that it is indeed an axiomatization of the M4 matrix. Afterwards, we define a system based on E that we name EF4, for which we also prove strong soundness and completeness and how it originates from the M4 matrix, all of this based on the fact that EF4 is a system equivalent to FDF4. With respect to EF4, two different modalities are presented: the first one, which in this case is equivalent to the inherent modality of E, is developed from the interdefinitional extensions used by Łukasiewicz, and the second one, from the proposal of J. Y. Beziau related to the approach of J. M. Font and M. Rius that in its turn is linked to the Portuguese algebraic tradition led by A. Monteiro. This way, we get two different modal systems, EF4-M and EF4-Ł. For the former, we give just one axiomatization, while for the latter, we supply up to four different ones. For both systems, EF4-M and EF4-Ł, we prove soundness and completeness. Furthermore, EF4 is provided with a reduced ternary relational semantics, as well as with a 2-set-up ternary relational semantics, and it is proved that it is sound and complete with respect to both semantics. Finally, it is shown that the system FDF4 is also sound and complete with respect to both aforementioned relational semantics and that the 2-set-up semantics is a particular case of the reduced semantics.

Índice

Introducción

Como prefacio a un trabajo técnico siempre resulta necesario establecer un contexto desde el cual desarrollar toda la investigación. Ese mismo es nuestro objetivo en este primer momento: Establecer el contexto que sirva como sustrato a nuestra investigación y que justifica su necesidad y su utilidad. Para ello desarrollaremos tres secciones diferenciadas. En las dos primeras presentaremos un contexto histórico general sobre las lógicas modales y las lógicas de la relevancia. Ambos epígrafes servirán para entender el camino recorrido por las disciplinas y situar con facilidad la propuesta de trabajo. En tercer y último lugar entraremos en mayor detalle sobre las circunstancias precisas que dan lugar a la investigación y sobre cuál es su motivación. Por añadidura presentaremos sus objetivos y mostraremos cómo esta investigación supondrá un avance con respecto a las circunstancias particulares. Previo a esta tarea daremos la siguiente definición que probará ser útil:

Definición 0.0 (Conceptos básicos): El lenguaje proposicional consiste en un conjunto enumerable de variables proposicionales p_0, p_1,..., p_n,... y todas o algunas de las conectivas $\rightarrow$ (Condicional), $\wedge$ (Conjunción), $\vee$ (Disyunción),$\neg$ (Negación), M (Posibilidad) y L (Necesidad). Las fórmulas bien formadas (fbf) y su conjunto se definen de la manera habitual, donde estas serán representadas por letras latinas mayúsculas: A, B, C.... Adicionalmente, $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{F}$ representan el conjunto de las variables proposicionales y el conjunto de las fbf, respectivamente.

Merece la pena señalar como punto adicional, que a la hora de escribir las fórmulas de tipo condicional usaremos el punto (**.**) como indicativo de la implicación principal para así evitar el uso de paréntesis excesivos y hacer más fácil la lectura. Por último, los diferentes *ítems* como la Definición 0.0 que acabamos de dar, obtendrán su nomenclatura a partir de la parte en la que aparezcan, siendo 0 la correspondiente a la introducción, y el orden en el que aparezcan dentro de esta.

1 Lógica Modal

Bajo el concepto de lógica modal se suele incluir el estudio de la modalidad desde numerosos y, a veces, radicalmente diferentes puntos de vista. Se puede hablar de lógica modal en un sentido *aleteo*, deóntico, temporal, doxástico o, incluso, espacial, dando lugar a las correspondientes lógicas. Sin embargo, la corriente más extendida y que trataremos es la primera listada: la concepción *aletea* de la lógica modal. Desde esta corriente se ha investigado el significado de los conceptos de posibilidad y necesidad desde un punto de vista formal y cómo estos pueden ser entendidos. A pesar de que el estudio de la modalidad proviene ya de los primeros momentos de formación del pensamiento lógico, bien con la escuela aristotélica, bien con el desarrollo escolástico, nuestra intención aquí es dar una aproximación histórica a la lógica modal moderna, centrándonos en el siglo XX. Para llevar a cabo este estudio distinguiremos tres tradiciones[1] claramente diferenciadas: Sintáctica, Matricial y Algebraica, y Modelo-teorética.

1.1 Tradición Sintáctica

En 1912 C. I. Lewis escribiría una crítica a la revista *Mind*. En ella abordaba el error contenido en la lógica clásica a la hora de interpretar la implicación [Lewis, 1912]. De esta manera tan simple da comienzo la lógica modal moderna. Las críticas de Lewis, aunque centradas en la implicación[2], se extendían también al resto de conectivas clásicas, siendo, de hecho, su primera crítica a la disyunción a través de las siguientes proposiciones:

(I) O bien Julio César ha muerto o la luna es un queso de bola

(II) O bien Matilde no me ama o soy amado

Si dejamos de lado la cuestión de lidiar con una disyunción exclusiva, ambas proposiciones pueden ser consideradas como disyunciones de la forma $A \vee B$, donde la primera será cierta, ya que sabemos que Julio César está muerto, pero sin embargo, la segunda será siempre cierta, independientemente de cuáles sean los hechos acontecidos. De esta manera, asegura Lewis, (II) tiene un carácter formal o puramente lógico que (I) no posee. Desde este análisis podríamos concluir que (II) es cierta porque tiene un carácter teoremático, es decir, es probable en un determinado sistema. La conclusión final de Lewis radica en que, mientras la disyunción propuesta en (I) sería de carácter extensional, la de (II) lo sería de tipo intensional. Así, mientras la disyunción del primer caso puede ser representada por la clásica conectiva de la disyunción, habría que definir una completamente distinta para el segundo.

De la misma manera Lewis presentó sus críticas a la implicación, donde habría que distinguir dos tipos: la implicación material de la lógica clásica y la implicación teoremática de carácter intensional, la cual Lewis denominaría como implicación estricta. La solución del lógico de Massachusetts pasaba por desarrollar un cálculo para su implicación estricta de una manera axiomática. Los sistemas axiomáticos que Lewis definiría para exponer su implicación estricta se convertirían en lo que hoy conocemos como la cadena de sistemas S1-S5[3] [Lewis, 1918]. Aunque la comprensión de Lewis acerca de las cuestiones modales está más allá de cualquier tipo de duda, sus sistemas no hacen patentes estos conceptos, sino que los incorporan de manera intrínseca a su implicación estricta y a los teoremas de esta. El hecho de sólo aportar una aproximación sintáctica a sus sistemas, de alguna manera, causaría los problemas que permitirían superar a Lewis y explorar la potencia de la cadena S1-S5. Esto se debe en gran parte a que, al sólo plantearlos de una manera sintáctica y aportar una vaga descripción

[1] La división en tres tradiciones se debe a [Bull y Segerberg, 1984]

[2] Para las críticas a la implicación y una explicación más desarrollada puede consultarse la sección posterior dedicada a las lógicas de la relevancia

[3] Más tarde se añadieron S6, gracias a M. J. Alban [Alban, 1943] y S7 por S. Halldén [Halldén, 1949], además de la multiplicidad de extensiones que fueron desarrolladas más tarde

acerca de su funcionamiento semántico, se producirían problemas relacionados con la completud de los sistemas.

Sin duda, esta aproximación a las lógica modales ha tenido su eco hasta la actualidad, ya que los sistemas S1-S5 siguen siendo de una importancia vital y una actualidad indispensable, a pesar de que el tratamiento de Lewis se vio obsoleto demasiado pronto. En este sentido, el trabajo en este estilo se vio continuado por O. Becker y H. von Wright en [Becker, 1930] y [von Wright, 1951a; 1951b; 1968].[4]

1.2 Tradición Matricial y Algebraica

Una de las características principales de la lógica clásica es su bivalencia, es decir, el hecho de que para cualquier proposición esta sea, o bien verdadera, o bien falsa. Sin embargo, si queremos tratar proposiciones que se escapan a estos parámetros, tal y como quería hacer el polaco J. Łukasiewicz alrededor de 1918, nos encontraremos con un grave problema cuya solución derivaría no sólo en el desarrollo de una perspectiva de las lógicas modales, sino también en la implementación de las lógicas multivaluadas. El principal interés de Łukasiewicz era el análisis de lo que Aristóteles denominaba como futuros contingentes [Aristóteles, 1972; 18b], donde, al tratar un hecho no acontecido todavía, no resulta posible asignarle un valor de verdad clásico, puesto que no habrá de ser verdadero ni falso si aún no ha acontecido[5]. A este respecto, el lógico polaco denominaría este hecho como posible y cambiaría la bivalencia de la lógica clásica por un tratamiento trivalente. De esta manera, un valor intermedio, nominalmente $1/2$, tomaría la interpretación de *indeterminado* o *posible*. Así, Łukasiewicz habría conseguido un método para tratar la cuestión modal de la posibilidad. A partir de esta primera modificación de la lógica clásica, que pasaría a ser conocida como Ł3, Łukasiewicz desarrollaría su cadena de sistemas multivaluados, donde se podrían incluir tantos valores de verdad como se quisiesen, llegando incluso a desarrollar sistemas de infinitos[6] valores de verdad.

Aún así, el desarrollo matricial por parte de Łukasiewicz no terminó de esta manera, sino que, gracias a la colaboración de A. Tarski, quien previamente había sido alumno suyo, incluyó dos nuevos operadores monádicos para representar la necesidad y la posibilidad [Font y Hajek, 2002]. Ambos operadores actuarían de una manera similar a como lo hace la negación, dando lugar a tablas de

[4]Cabe destacar que hay dos tradiciones que surgen desde este enfoque: las lógicas de la relevancia, tratadas en momentos posteriores, y la Teoría de pruebas, basada en los cálculos Gentzen que hasta hace relativamente poco no ha llegado a suponer una parte importante de la lógica modal

[5]La idea de Łukasiewicz claramente descansa en un enfoque no determinista de la realidad, ya que cuenta con que el futuro no está designado y no puede ser averiguado hasta que ocurra. Para el enfoque más filosófico de Łukasiewicz acerca de la libertad y la cuestión determinista puede comenzarse por la *Lección de Despedida* para más tarde progresar a otros textos, todos ellos contenidos en [Łukasiewicz, 1970]

[6]Al hablar de infinito Łukasiewicz fue capaz de desarrollar sistemas tanto para infinito numerable como no numerable. Para esta cuestión pueden consultarse [Łukasiewicz, 1970] y [McCall, 1967], ya que los originales se encuentran escritos en polaco

verdad en las que se incluirían los valores de verdad adicionales desarrollados por Łukasiewicz.

Sin embargo, todo el esfuerzo llevado a cabo por Łukasiewicz con la colaboración de Tarski no obtuvo la recompensa esperada, sino que la comunidad lógica pronto detectó algunas cuestiones que, intuitivamente, no se sostenían y que pasarían a ser denominadas como paradojas modales[7]. Por una parte, los sistemas del polaco permitían que las contradicciones fuesen posibles. Esto lleva directamente al absurdo, ya que, utilizando el ejemplo aristotélico rescatado por Łukasiewicz, es inadmisible que sea posible que mañana tenga lugar una batalla naval y, a su vez, también suceda que esta no tenga lugar. Adicionalmente nos encontramos con tesis más fuertes que también son verificadas y que caen bajo el concepto de paradoja modal como, por ejemplo, que de la conjunción de dos posibilidades, se siga la posibilidad de la conjunción[8]. Con todo ello, el punto más interesante reside en cómo Łukasiewicz, lejos de admitir que su trabajo tenía problemas y podía resultar erróneo, asumió estas paradojas y no sólo no las rechazó, sino que las alabó como parte del sistema que mostraba su exactitud [Łukasiewicz, 1953]. Esto, en sus propios términos, se debía a que las diferentes personas poseen diferentes conceptos de necesidad y posibilidad, causando así que no hubiese un problema, sino sólo enfoques distintos.

Desde este punto, el trabajo realizado por Łukasiewicz se generalizaría dando lugar al concepto de matriz (Cf. [Malinowski, 1977]), y desde el cual se asentaría el concepto de álgebra. Y, si bien se había desarrollado este método para estudiar la lógica, pronto se subvertiría y daría lugar al caso contrario; es decir, se pasaría de estudiar la lógica a través del álgebra a estudiar el álgebra a través de la lógica. El paso natural fue la extensión de álgebras o matrices a clases de álgebras, el estudio de varias matrices al mismo tiempo. Si un estudioso fue el impulsor de este movimiento, ese fue sin duda el ya mencionado colaborador de Łukasiewicz, Tarski. De entre los primeros resultados obtenidos cabe destacar que todos los sistemas de Lewis eran distintos entre sí, la decibilidad de S2 y S4, o el hecho de que ninguno de los sistemas de S1-S5 poseía una matriz característica finita, aunque todas las extensiones de S5 sí la tuvieran.

1.3 Tradición Modelo-Teorética

Si ignoramos las semánticas algebraicas, ya que su aproximación no es totalmente modal, entonces la primera persona en dotar de una semántica a la lógica modal fue el alemán R. Carnap. En él convergió la influencia de tres figuras de indiscutible importancia, tal y como él mismo señalaba: de G. Frege adquirió el interés por la semántica y aprendió la distinción entre intensional y extensional; de G. Leibniz tomó la idea de necesidad como verdad en todos los mundos posibles; y de L. Wittgenstein incorporó la idea expuesta en el *Tractatus* de

[7]Entiéndase que, cuando aquí y más adelante, utilizamos el término Paradoja nos estamos refiriendo al sentido original del término, $\pi\alpha\rho\alpha - \delta o\xi\alpha$, en contra del sentido común, que supone una aberración para el conocimiento más intuitivo

[8]Para más información sobre el rechazo a estas cuestiones puede consultarse [Lewis y Langford, 1959]

que las condiciones de verdad de una proposición constituyen su significado, y comprender la proposición supone conocer estas [Carnap, 1942; 1947].

La semántica de Carnap se basaba, para su aspecto modal, en las descripciones de estado; un conjunto de proposiciones atómicas. Así, una fbf cualquiera A sería necesaria si y sólo si (syss) fuese verdadera en todas las descripciones de estado. De la misma manera, A sería posible syss fuese verdadera en, al menos, una descripción de estado cualquiera. Esta descripción semántica de modalidad por parte del alemán coincide con el conjunto de tesis que Lewis seleccionó para dar forma a S5 pero, debido a la caracterización que el estadounidense hiciese de su sistema, da la impresión de tratarse de una mera coincidencia.

Todo el planteamiento carnapiano, aunque cercano a la semántica moderna para las lógicas modales, carece de uno de sus elementos fundamentales: los mundos posibles. Carnap llegó extremadamente cerca de esta semántica, la de los mundos posibles, e incluso se podría decir que poseía las herramientas para ello por la influencia leibniziana, pero nunca llegó hasta ella, a pesar de tratarse de una simple diferencia de la terminología en el aspecto formal. Desde este punto, A. N. Prior, interesado en la lógica temporal, desarrollaría estructuras basadas en el concepto de la infinitud de los números naturales [Prior, 1957], siendo la primera persona en utilizar una relación binaria en el contexto de la lógica modal e interpretarla como una relación de accesibilidad. Tras esto, S. A. Kripke, a través de numerosos e importantes artículos, [Kripke, 1959; 1963a; 1963b; 1965], daría la visión más completa y certera de la semántica de mundos posibles para las lógicas modales. Aún así, de manera independiente a Kripke, tanto J. Hintikka como S. Kanger[9] obtuvieron resultados similares. Aunque los resultados de Kanger fueron los primeros en obtenerse, tuvieron una repercusión mucho menor, en parte por la oscuridad y dureza de sus textos, así como su modesto método de publicación[10]. Por otra parte, el trabajo de Hintikka fue acogido con mayor ímpetu por la comunidad filosófica gracias a un estilo en el que prevalecía la discusión sobre los mundos posibles y sus implicaciones sobre las pruebas, reduciendo el aspecto técnico.

1.4 Otra tradiciones

Con las tres tradiciones expuestas, hemos cubierto la mayor parte de la historia de la lógica modal pero, al igual que ocurre con cualquier trabajo histórico, hemos tenido que dejar atrás algunos hitos cuya relativa importancia merece ser resaltada. Por una parte tenemos la interpretación basada en la demostración, directamente ligada a la meta-lógica, cuyo origen podríamos establecer en el artículo de 1933 de K. Gödel, donde trabajaría con S4 desde una perspectiva intuicionista [Gödel, 1933]. Esta vía de estudio ha sido desarrollada por R. Montague, H. Friedman y R. S. M. Solovay[11].

[9] [Hintikka, 1957; 1961; 1963] y [Kanger, 1957a; 1957b; 1957c; 1957d]

[10] A este respecto, el propio Hintikka escribiría una generosa *review* donde reclamaba el reconocimiento que habría de merecer; [Hintikka, 1969]

[11] [Montague, 1963], [Friedman, 1975], y [Solovay, 1976] respectivamente

También existe lo que se denomina como la interpretación sintáctica de McKinsey, cuyo origen es el trabajo de J. C. C. McKinsey [McKinsey, 1945], aunque pueden encontrarse antecedentes en el trabajo de F. B. Fitch. Por otra parte cabe señalar el trabajo de Prior y su lógica modal trivaluada Q [Prior, 1957]. Podríamos llegar incluso a hablar del desarrollo de la lógica modal intuicionista con su origen en [Fitch, 1948], [Curry, 1950] y [Prawitz, 1965].

2 Lógica de la Relevancia

Las lógicas de la relevancia, aunque con un origen común e intereses similares a las lógicas modales, se constituyen como una disciplina totalmente distinta. Y es que, aunque el estudio del concepto de Condicional[12] y el de Relevancia parecen estar indisolublemente ligados, es necesario esperar hasta el principio del S. XX para encontrar un tratamiento sistemático que aborde el problema desde una perspectiva lógico-formal. Así, podremos hablar de unos orígenes en los que las lógicas de la relevancia existían de una manera embrionaria para después florecer en la disciplina en sí misma.

2.1 Orígenes

Como hemos mencionado con anterioridad, Lewis en 1912 pone de relieve el fallo de la lógica clásica y aborda el estudio de la conexión entre consecuente y antecedente. El trabajo de Lewis surge, primero, de su disconformidad con los condicionales inconexos como el clásico ejemplo "*Si la luna es un queso de bola, entonces 2+2=4*" que, dado que *2+2=4* es una verdad a priori, de acuerdo a los cánones clásicos, sería un condicional verdadero en todo momento a pesar de la aberración que supone para el sentido común. En segundo término Lewis declara una guerra espiritual, en el más puro sentido łukasiewiczano, a determinadas tesis clásicas que él catalogaría como paradojas de la implicación material. Dentro de estas tesis podemos encontrar, entre otras, las siguientes:

$p \to .q \to p$

$\neg p \to .p \to q$

$(p \to q) \vee (q \to r)$

Esta serie de tesis lógicas comparten entre ellas la innegable característica de que, independientemente de cuál sea el significado en una interpretación de sus variables, serán siempre verdaderas, lo que produciría en el intérprete un rechazo por su carácter paradójico. En este punto, Lewis buscaría una solución que le permitiese eliminar las paradojas de la implicación de la lógica. Para ello ideó lo que a día de hoy se conoce bajo el nombre de implicación estricta[13]. Este

[12]Entendemos por Condicional cualquier oración del tipo "Si... entonces...", donde la primera parte la denominaremos como antecedente y la segunda como consecuente. Este término, Condicional, ha de considerarse como sinónimo a Implicación o Entrañamiento. Para la cuestión gramatical puede consultarse el clásico apéndice de Anderson y Belnap en [Anderson y Belnap, 1975] bajo el título de *Grammatical Propaedeutic*

[13]Si se utiliza la flecha simple ($\to$) como símbolo universal para el condicional, el utilizado para la implicación estricta es el *hook* o gancho pero, por limitaciones, usaremos el mismo

mecanismo le servía para definir un nuevo tipo de condicional que permitiese desarrollar sistemas que careciesen de las paradojas de la implicación material. A través de un enorme tesón, su tarea dio frutos llegando a buen término, permitiéndole eliminar por completo estas paradojas, pero no sin antes asumir un coste demasiado elevado. En su pretensión por eliminar las paradojas de la implicación material pero tratando a su vez de mantener gran parte del carácter de la lógica clásica, Lewis había permitido entrar por la puerta trasera a lo que se conoce por paradojas de la implicación estricta. La nueva implicación que el lógico norteamericano había desarrollado permitiría la existencia de tesis tales como:

$p \wedge \neg p \to \centerdot q$

$p \to \centerdot q \to q$

$p \to \centerdot q \vee \neg q$

Esta nueva serie de tesis poseen la misma desconexión entre antecedente y consecuente que aqueja a las paradojas de la implicación material, con lo que el esfuerzo de Lewis quedaría como inane[14]. Sin embargo, esto, aunque supuso un importante revés para implicación estricta, no fue asumido por Lewis como una derrota sino más bien como la constatación de un hecho. Para Lewis estas nuevas paradojas venían a demostrar que no era posible desarrollar una lógica que eliminase todas las paradojas de la implicación, material y estricta, o al menos no sería posible sin renunciar a una parte fundamental de lo que entendemos por condicional.

La cuestión de las paradojas de la implicación se mantendría en una especie de letargo durante aproximadamente dos décadas, hasta que W. Ackermann[15] publicase [Ackermann, 1956; 1958], donde recuperó el interés por una lógica carente de paradojas de la implicación. En estos artículos Ackermann desarrollaría los Σ-sistemas nombrados como ΣTV y Σ' que, como sistemas al estilo Hilbert, se denominarían como Π y Π' respectivamente[16]. El primer sistema estaría basado en la idea de un cálculo bivalente, mientras que el segundo se centraría en la cuestión de las paradojas de la implicación. Este sistema, Π', se encontraría con un problema debido a la denominada como regla γ, comúnmente conocida como silogismo disyuntivo[17]. Esta regla facilitaría que la regla *Ex Contradictione Quodlibet* (ECQ)[18] fuese demostrable a través de la llamada prueba de Lewis, tal y como sigue:

símbolo que para el condicional material

[14] Resulta justo señalar que, aunque otros investigadores se dieron cuenta de estas nuevas paradojas, el primero en identificarlas fue el propio Lewis

[15] Además de Ackermann, A. Church trabajaría sobre la cuestión en [Church, 1951], pero dada su reducida importancia en las obras principales, hemos preferido prescindir de él en nuestra narración

[16] Con respecto a la nomenclatura de los sistemas, aparte del texto original en alemán, puede consultarse el Capítulo VIII de [Anderson et al., 1992]

[17] A y $(\neg A \vee B) \Rightarrow B$

[18] $A \wedge \neg A \Rightarrow B$

1. $A \wedge \neg A$	Hipótesis
2. A	Eliminación de la Conjunción, 1
3. $\neg A$	Eliminación de la Conjunción, 1
4. $A \vee B$	Introducción de la Disyunción, 2
5. B	Silogismo Disyuntivo, 3, 4

De esta manera se admitiría una regla tan fuerte como ECQ que permitiría obtener cualquier tesis a partir de una contradicción. Así el trabajo de Ackermann quedaría aquejado de un grave problema pero, a pesar de ello, supondría el primer gran paso de cara al surgimiento de las lógicas de la relevancia tal y como las conocemos hoy[19].

2.2 Desarrollo

Tras el problema inherente a los sistemas de Ackermann la respuesta no se hizo esperar, y hacia 1960 se encuentran los primeros artículos[20] que culminarían en 1975 con la publicación de la primera obra de gran importancia para las lógicas de la relevancia: *Entailment: The logic of relevance and necessity* [Anderson y Belanp, 1975]. En este tratado, los autores, A. R. Anderson y N. Belnap, llevarían a cabo por primera vez de manera concluyente el objetivo original de Lewis, demostrando que sí era posible eliminar las paradojas de la implicación en su totalidad, incluyendo las paradojas de la implicación estricta[21].

Dentro de esta monumental obra se definen los dos sistemas relevantes por antonomasia E y R, definidos como el sistema de la implicación relevante necesaria y el sistema del condicional relevante, respectivamente. El sistema E se construye desde los restos de Π' de Ackermann, del cual se elimina la regla γ, y se busca una implicación que, aparte de establecer una relación entre antecedente y consecuente, exprese una relación de necesidad entre ellos. En oposición, R es construido como un fragmento de la implicación clásica obtenido a través de una caracterización sintáctica.

Siendo estos dos los principales sistemas relevantes expuestos en *Entailment*, no hemos reflejado específicamente qué caracteriza a un sistema relevante para que cualifique como tal. A este respecto tenemos dos caracterizaciones distintas, una sintáctica, ya anunciada antes, y una semántica:

Definición 0.1 (Caracterización Sintáctica): Sean $A_1, ..., A_n$ y B fbf cualesquiera. $A_1 \to (... \to (A_n \to B)...)$ pertenece a las lógicas de la relevancia syss cada A_i (para $i \in \mathbb{N}$ y $1 \leq i \leq n$) se usa para probar B.

Definición 0.2 (Caracterización Semántica): Sea $A \to B$ una fbf cualquiera, entonces esta fbf pertenecerá a las lógicas de la relevancia syss A y B tienen, al menos, una variable proposicional en común.

[19] La información acerca del sistema de Ackermann puede ser ampliada por medio de [Meyer et al., 1983] y [Urquhart, 2016]

[20] Cf. [Anderson y Belnap, 1959; 1962], [Anderson, 1960] y [Belnap, 1960]

[21] Es importante hacer notar que, aunque ignorado en esta narración, K. Dosen recoge en [Dosen, 1992] la primera axiomatización de la parte implicacional de R por I. E. Orlov en 1928

Esta segunda caracterización, la semántica, es recogida por Anderson y Belnap a modo de propiedad característica de R, y denominada como *Variable Sharing Property* (VSP)[22].

Definición 0.3 (VSP): Sea S un lógica de la relevancia, entonces, si $A \to B$ es un teorema de S, necesariamente A y B tienen, al menos, una variable proposicional en común.

Tal y como se puede suponer, esta propiedad permite que todo teorema que caiga debajo de sus criterios no sea una paradoja de la implicación. De manera añadida a esta doble caracterización de las lógicas de la relevancia y la introducción de la VSP, quedaría por remarcar dos características de las lógicas de la relevancia: la propiedad de la ausencia de piezas sueltas y la paraconsistencia, pero previamente hemos de dar una definición adicional para caracterizar los elementos de las fórmulas implicativas:

Definición 0.4 (Partes antecedentes y partes consecuentes): Sea A una fbf cualquiera, entonces:

(I) A es una parte consecuente de A

(II).(a) Si $B \wedge C$ es una parte consecuente de A, entonces B y C son a su vez partes consecuentes

(II).(b) Si $B \wedge C$ es una parte antecedente de A, entonces B y C son a su vez partes antecedentes

(III).(a) Si $B \vee C$ es una parte consecuente de A, entonces B y C son a su vez partes consecuentes

(III).(b) Si $B \vee C$ es una parte antecedente de A, entonces B y C son a su vez partes antecedentes

(IV).(a) Si $B \to C$ es una parte consecuente de A, entonces B es una parte antecedente de A y C es una parte consecuente de A

(IV).(b) Si $B \to C$ es una parte antecedente de A, entonces B es una parte consecuente de A y C es una parte antecedente de A

(V).(a) Si $\neg B$ es una parte consecuente de A, entonces B es una parte antecedente de A

(V).(b) Si $\neg B$ es una parte antecedente de A, entonces B es una parte consecuente de A

A continuación podemos definir ya la paraconsistencia y la ausencia de piezas sueltas:

Definición 0.5 (Ausencia de piezas sueltas): Si A es demostrable y A no contiene conjunciones como partes antecedentes, ni disyunciones como partes consecuentes, cada variable proposicional de A aparece, al menos una vez, como parte antecedente y parte consecuente.

Definición 0.6 (Paraconsistencia): Sea S una lógica definida sobre un lenguaje $\mathfrak{L}$, entonces S es paraconsistente syss no incluye la regla ECQ.

Con estas dos nuevas propiedades las lógicas de la relevancia quedan totalmente caracterizadas.

[22] Dado que no existe una traducción estandarizada al castellano del término, se mantendrá la nomenclatura original, pero algunas tentativas para solucionar este hecho serían Propiedad de compartir variables o Propiedad de *compartición* de variables

Estas serían, por tanto, las propiedades características de las lógicas de la relevancia[23].

Sin embargo, el proyecto de Anderson y Belnap adolecía de un grave problema puesto que, a pesar de sus esfuerzos para desarrollar sistemas funcionales sin las paradojas de la implicación, no había sido posible obtener un resultado de completud a través de los cauces habituales. Ante este problema, de nuevo, el interés por la cuestión provocó la movilización de nuevos investigadores. Si bien se ofrecieron diferentes soluciones como las aparecidas en [Maksimova 1970, 1971 y 1973], [Urquhart, 1972] y [Fine, 1974][24], la respuesta definitiva vino de mano de R. K. Meyer y R. Routley quienes en 1972 ya se habrían involucrado en la cuestión. A partir de [Routley y Meyer, 1972a; 1972b; 1973], se estableció la base de lo que luego sería la obra cumbre de las semánticas relevantes: *Relevant Logics and their Rivals* [Routley et al., 1982]. En esta obra Routley y Meyer, acompañados de V. Plumwood y R. T. Brady, expusieron detalladamente todo su trabajo a la hora de desarrollar las semánticas relevantes, en especial la conocida como semántica relacional ternaria. Además, se aportaron resultados de corrección y completud, y el método para obtenerlos para los grandes sistemas ya definidos. A su vez se mostró la posibilidad de desarrollar nuevos sistemas, entre los que es necesario destacar la lógica B, considerada, en la obra, como lógica básica.

La gran aportación de esta obra fue, sin duda, el desarrollo de la semántica relacional ternaria. Tomando los elementos característicos de la semántica relacional de mundos posibles implementada por Kripke, se desarrollaría un enfoque completamente distinto para el condicional relevante. Al igual que en la semántica de mundos posibles kripkeana se podría utilizar un mundo posible designado, muchas veces interpretado como el mundo actual, pero la diferencia principal residiría en que, en vez de utilizar una relación binaria, es decir, de comparación entre dos mundos posibles o teorías, se utilizaría una relación ternaria. En esta relación se establecería un orden entre los conjuntos afectados, ya sean mundos posibles, teorías, *set-up*[25] o cualquier entidad que resulte cómoda al lector; una vez establecida la relación, si el condicional fuese cierto en el primero de los mundos y el antecedente en el segundo entonces, necesariamente, el consecuente habría de serlo en el tercero[26]. Es decir, para los mundos a, b

[23]Para alguien versado en las lógicas de la relevancia es más que obvio que esto puede considerarse como una falsedad, puesto que hay casos de lógicas de la relevancia en los que bien la ausencia de piezas sueltas, bien la VSP, no son verificados por el sistema, pero, sin embargo, al estar tratando de ofrecer una perspectiva lo más general posible estos casos quedarán omitidos. Para más información puede consultarse [Méndez y Robles, 2012]

[24]Con respecto a estas alternativas puede consultarse [Dunn, 2015], donde se ofrece una comparativa de las dos últimas

[25]Llamará la atención el hecho de mantener a lo largo de todo el trabajo el concepto anglosajón de *set-up* en vez de buscar una traducción adecuada. Sin embargo, este hecho ha sido totalmente consciente y es debido a la amplitud del concepto de *set-up* y su difícil traducción, o al menos si se busca una traducción concreta. Al igual que se hiciera en *Relevant Logics and their Rivals*, se ha preferido dejar el concepto vacío de una interpretación determinada para que el lector pueda concretar el significado que le resulte más cómodo y cercano

[26]La discusión acerca de la interpretación de la semántica relacional ternaria es muy amplia.

y c, dada la relación R, se establece que $Rabc$ y, siendo A y B fbf, en caso de que $A \to B$ sea verdadero en a y A verdadera en b, entonces, necesariamente, B será verdadera en c. Esta relación establecida entre los mundos, a su vez se vería reforzada por el operador de ordenación, habitualmente representado por el símbolo $\leq$. Para teorías a y b, en caso de darse $a \leq b$, estaría indicando que en una relación R, a se encontraría incluida en b[27].

El otro concepto de vital importancia desarrollado en *Relevant Logics and their Rivals* es el llamado operador Routley, habitualmente representado con un asterisco ($*$), un expediente conjuntista con el que estudiar la negación relevante. Este concepto se construye como una operación involutiva tal que, para la negación de una fórmula en un mundo determinado, generaría una imagen de dicho mundo en el que la fbf original no estuviese incluida. Es decir, para una fbf cualquiera A y una teoría a, si $\neg A$ es verdadera en a, entonces, tras la aplicación de la negación relevante, A no sería verdadera en $a*$[28]. Esta forma de negación produciría la construcción de un mundo alternativo en el que los argumentos de las negaciones no tienen cabida, dando lugar a una interpretación radicalmente diferente de lo que habitualmente se entiende por negación[29].

Cabe señalar que en la obra se tratan otros temas de vital importancia como los lemas de extensión posibles para estas semánticas, el uso de reglas disyuntivas a fin de probar completud para sistemas más débiles o alternativas a cuestiones todavía abiertas[30].

2.3 Avances posteriores

A partir de ese punto, el avance de las lógicas de la relevancia ha sido inmenso. Cabe destacar la publicación de la segunda parte de *Entailment*, de nuevo a cargo de Anderson y Belnap, pero en esta ocasión con la colaboración de J. M. Dunn, y la segunda parte de *Relevant Logics and their Rivals*, con Brady como principal artífice, [Brady, 2003]. Como es de suponer, el desarrollo de la disciplina es demasiado grande como para intentar abarcarlo en un breve resumen pero, aún así, este trabajo quedaría incompleto si no se hiciese mención a los grandes avances por parte de Brady.

Siendo el principal interés del lógico australiano la construcción de una teoría de conjuntos intuitiva no trivial[31], Brady desarrollaría una jerarquía de sistemas para los que se aporta una extensiva investigación, tal y como puede verse en la colosal obra *Universal Logic* [Brady, 2006], amén de los múltiples artículos relacionados con la materia. La mayoría de estas lógicas pertenecen al ámbito de lo que Brady quedaría en denominar como *depth relevance logics*, o en un

En caso de querer ahondar en ella, consúltese [Beall et al., 2012]

[27]La función del operador de ordenación es más profunda, pero para evitar la introducción de excesivos conceptos técnicos aquí, se reserva ese hecho para el apartado correspondiente

[28]En símbolos: $\neg A \in a$ syss $A \notin a*$

[29]Al igual que ocurre con la semántica relacional ternaria, el operador Routley también se presta a numerosas interpretaciones. Para saber más acerca de ello, consúltese [Restall, 1999]

[30]En aras de la concreción, se emplaza al lector a investigar estos temas por su cuenta si tuviese interés

[31]*Non-trivial naïve set theory*

intento por traducirlo, lógicas de la relevancia de profundidad. Estas lógicas se caracterizan por el hecho de que sus teoremas tendrán, al menos, una de sus variables proposicionales a la misma profundidad. Es decir, en un teorema de tipo condicional al menos una variable proposicional, se ha de encontrar a la misma distancia en condicionales anidados del condicional principal, tanto en el antecedente como en el consecuente. En símbolos podríamos decir que, para variables proposicionales cualquiera p, q y r, en el teorema $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$, p se hallaría a la misma profundidad del condicional principal tanto en antecedente como en el consecuente, pero q no lo estaría, ya que en el consecuente habría un condicional anidado adicional.

3 Contexto de la investigación

Como hemos visto en la brevísima exposición histórica anterior, el desarrollo de las lógicas modales y, a su vez, de las lógicas de la relevancia es realmente amplio y nos sitúa en un escenario donde las posibilidades son prácticamente inagotables. Partiendo de este hecho innegable, hemos de elegir cuáles serán los elementos que tomaremos como base a la hora de desarrollar nuestro trabajo. Así, por una parte, designaremos como referencia la lógica modal que Łukasiewicz desarrollaría casi al final de su vida, conocida bajo el nombre de Ł, ó Łm4 en literatura reciente. Por otra parte tomaremos como segunda gran referencia los sistemas relevantes y multivaluados que Brady expuso en [Brady, 1982]: RM3 y BN4.

3.1 Łm4 y las Paradojas Modales

Ya en el ocaso de su vida Łukasiewicz, definiría el que llegaría a considerar como su sistema definitivo pero, a la vez, también el que más polémica despertaría[32]: Łm4. Este sistema está basado en una concepción tetravaluada de la modalidad. Como hemos visto con anterioridad, el sistema se encuentra plagado de determinadas paradojas modales, que serían denominadas más adelante como Paradojas modales fuertes tipo Łukasiewicz. Bajo este nombre nos encontramos con las siguientes:

(I) $(MA \wedge MB) \rightarrow M(A \wedge B)$
(II) $L(A \vee B) \rightarrow (LA \vee LB)$
(III) $LA \rightarrow (B \rightarrow LB)$
(IV) $LA \rightarrow (MB \rightarrow B)$

Como debería resultar obvio, estas tesis suponen un atentado contra el sentir común, a pesar de la defensa a ultranza que Łukasiewicz hiciese de ellas.

[32] G. E. Hughes y M. J. Cresswell llegaron a determinar que "*el sistema nos lleva al límite de lo que se puede entender como lógica modal*" [Hughes y Cresswell, 1968, p. 310]

3.2 BN4 y RM3

En 1982 Brady daría las pruebas de corrección y completud para dos sistemas que a lo largo del tiempo obtendrían gran difusión: RM3 y BN4. La primera sería una lógica trivaluada basada en la extensionalidad de sus proposiciones, a las cuales se les podría otorgar bien la verdad, bien la falsedad, o bien las dos. Esta misma lógica permitiría también establecer un vínculo entre ella y la lógica trivaluada de Łukasiewicz. Sin embargo, la lógica que más nos interesa es, sin duda, BN4. Este sistema se construiría con una aproximación tetravaluada donde las proposiciones podrían ser verdaderas, falsas, ambas a la vez o ninguna de las dos cosas. Esta lógica se encontraría construida sobre una modificación de la matriz de T. Smiley , matriz característica para el sistema *First Degree Entailment* (FDE) definido por Anderson y Belnap [Anderson y Belnap, 1975]. A su vez, esta matriz, en términos de Dunn, sería una simplificación de la matriz octovaluada de Belnap [Belnap, 1960]. BN4, para Brady, está construida como una versión tetravaluada del sistema clásico del condicional relevante R. Además de esto, BN4 representaría el condicional relevante adecuado para FDE tal y como atestigua J. Slaney en [Slaney, 2005, p. 289]. Con respecto a su nomenclatura, BN4 estaría nombrada por referencia al sistema de lógica básica B sobre la que se construye, la utilización de *neither* como valor de verdad en la matriz, y su carácter tetravaluado.

3.3 FDF4, EF4, EF4-M y EF4-Ł

Con ambos antecedentes explicados podemos dar las nociones básicas de cuáles serán nuestros objetivos. En un primer momento definiremos una matriz alternativa a la matriz característica de BN4[33] que caracterizaremos por ser una expansión implicativa de la matriz tetravaluada de Belnap[34]. Manteniendo la negación, disyunción y conjunción, se modificaría la implicación para tener una matriz completamente distinta que denominaremos como M4. Esta matriz, caracterizada por tener dos valores designados de entre los cuatro, tendría la característica particular de ser divisible en dos matrices trivaluadas diferentes; la primera, tomando como base la parte de ambos, daría lugar a la matriz característica de RM3, mientras que la segunda, con la parte de la matriz ligada a ninguno, generaría la matriz del sistema $S5_3^Ł$, definido en [Méndez y Robles, 2016b]. Esta divisibilidad resulta especialmente interesante por el hecho de que la matriz de BN4 sea a su vez divisible en las matrices características de RM3 y Ł3.

Con esta matriz pasaríamos a poder definir dos sistemas diferentes: FDF4 y EF4[35]. El primero sería la reinterpretación del sistema FDE en base a la matriz

[33] Una de las razones para escoger esta matriz es el hecho de que la matriz característica de Łm4 sea tetravaluada como esta (Cf. [Smiley, 1961])

[34] La idea original de Belnap puede ser encontrada en [Belnap, 1977a; 1977b]. Para investigaciones posteriores no puede dejarse de consultar [Dunn, 2000]

[35] La nomenclatura de los sistemas iría acorde a como Brady nombra sus sistemas. Para el primero, estaría basado en FDE y se hace gala del valor falso de la matriz y su caracterización tetravaluada. Para el segundo tomaríamos como base el sistema E, la falsedad y el hecho de

M4 que hemos definido, y que serviría como ejemplo de cuán débil podría ser un sistema basado en la matriz, además de dar una extensión de FDE en base a una implicación relevante necesaria. Por otra parte, construiríamos un sistema llamado EF4 que actuaría de compañero del sistema BN4. Si BN4 es la versión tetravaluada de R, EF4 sería la versión tetravaluada de E. La construcción de EF4 pasaría por partir del sistema E sin *reductio* y se añadirían las tesis características de la matriz.

Tras este primer momento, nuestra atención se desviaría hacia los problemas relacionados con la modalidad de Łm4, el sistema de Łukasiewicz. Tomando como base EF4 y usando las extensiones interdefinicionales de los operadores modales de Łm4, equivalente a la modalidad intrínseca de E, construiríamos un sistema modal que carecería de las paradojas modales fuertes tipo Łukasiewicz que hemos visto más arriba, y que denominaremos EF4-Ł. En segundo término, utilizaríamos la opción modal que propone J. Y. Beziau, a su vez recogida por J. M. Font y M. Rius, originaria de los algebristas portugueses encabezados por A. Monteiro (Cf. [Beziau, 2011] y [Font y Rius, 2000]), para construir un nuevo sistema modal que llamaremos EF4-M.

Para terminar, y teniendo en cuenta que estamos trabajando con sistemas de ascendencia relevante, desarrollaríamos dos tipos de semántica relacional ternaria diferentes para EF4. Por un lado, una semántica basada en modelos reducidos y de potencia más que demostrada. Y por otro lado, una semántica de 2 set-up, que proporciona una alternativa a la semántica relacional ternaria habitual.

4 Sobre la bibliografía

En el apartado correspondiente a la bibliografía se han incluido una serie de *ítems* que, aunque no aparecen citados en el texto, parece importante mencionar por su influencia a la hora de redactar este texto. En primer término, en [Arieli y Avron, 1997] nos encontramos con un estudio de las expansiones del biretículo de Belnap-Dunn. El sistema base de este biretículo es BN4 tal y como se prueba en [Méndez y Robles, 2016a]. Adicionalmente, en [Robles y Méndez, 2016] tenemos E4, el sistema que debía actuar como *compañero* de BN4, lo que enlazaría directamente con los artículos [Brady, 1980; 1983; 1992; 1996; 2015], que resultan fundamentales para comprender la intención de Brady a la hora de desarrollar tanto BN4 como RM3. A este respecto, dado que la matriz que definiremos, como se mostrará más adelante, es divisible en dos matrices trivaluadas, es necesario mencionar los artículos que han servido como base al estudio de matrices trivluadas. Merece la pena destacar tanto [Osorio, 2007] como [Robles, 2013] y [Robles y Méndez, 2014a; 2014b]. Por otra parte, los sistemas que desarrollaremos son sistemas paraconsistentes, para lo cual es casi obligatorio citar [Priest, 1984; 2011; 2014; 2016] y [Goble, 2016]. En relación con este último hemos de mencionar todos las referencias relativas a las lógicas modales, puesto que desarrollaremos dos sistemas de lógica modal. Así merece la pena reseñar la importancia de [Parry, 1934] y [Hughes y Cresswell, 1985;

ser una lógica tetravaluada

1995]. Además, no podemos dejar de mencionar a E. J. Lemmon, puesto que su importancia en las lógicas modales es más que obvia tal y como se ve en [Lemmon, 1966a; 1966b] y [Lemmon et al. 1969]. En este punto es necesario señalar las obras que actúan como base del conocimiento de las lógicas de la relevancia: [Dunn, 1976b], [Routley, 1980] y [Routley y Meyer, 1983]. En relación a estos es importante reseñar el trabajo de Tennant en [Tennant, 1987], donde aparece la principal alternativa a la corriente de Anderson y Belnap, así como el artículo [Urquhart, 1984] que quedaría como una de las cimas de las lógicas de la relevancia. Además, en [Slaney, 1987], tenemos la principal referencia en lo que al modelo reducido de la semántica relacional ternaria se refiere. [Robles, 2006] es el trabajo que permitió un acceso asequible a la lógica B+, y en [Robles et al, 2016a; 2016b], se muestra la aplicabilidad de las semánticas relacionales. Por último, en base a las lógicas de la relevancia, podemos mencionar [Nelson, 1930], [Duncan-Jones, 1935], [Strawson, 1948] y [Bennet, 1954], donde se lleva a cabo la búsqueda de una implicación que culminaría en las lógicas de la relevancia y que podemos observar en [Dunn, 1980]. El *ítem* [Blok y Pigozzi, 1989] resulta interesante porque sirve para poner de manifiesto todos los fragmentos de interés de la matriz de Belnap. Es importante señalar que el estudio de Łukasiewicz y sus desarrollos posteriores vino de la mano de [Méndez y Robles, 2015] y [Méndez et al, 2016], así como en [Łukasiewicz, 1951] se puede apreciar la importancia que tiene Aristóteles en el pensamiento del polaco. En un sentido parecido, en [Blanco, 2015] se reseñan una serie de postulados intrínsecamente ligados al trabajo de Łukasiewicz. Por último, [Henkin, 1949] resulta la obra básica para el desarrollo de la pruebas de completud que llevaremos a cabo.

Parte I

La matriz M4 y su semántica

En esta primera parte nos centraremos en definir la matriz M4 con total precisión y exponer sus elementos más característicos. Adicionalmente desarrollaremos la semántica tetravaluada intrínseca a M4.

1 La matriz M4

En primera instancia definimos qué es una matriz lógica:

Definición 1.1 (Matriz Lógica): Una matriz lógica M es una estructura (K, T, F, f) donde:

(I) K es un conjunto

(II) T y F son subconjuntos no vacíos de K tales que $T \cup F = K$ y $T \cap F = \varnothing$

(III) f es el conjunto de las funciones definidas sobre K

De esta manera K es el conjunto de los elementos de M; T es el conjunto de los elementos designados y F es el conjunto de los elementos no designados. Las funciones pertenecientes a f interpretan en M las diferentes conectivas.

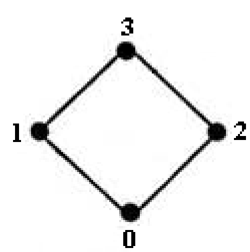
Definición 1.2 (Matriz M4): Sea la matriz M4 la estructura tal que:

(I) $K_{M4} = (0, 1, 2, 3)$

(II) $T_{M4} = (2, 3)$ y $F_{M4} = (0, 1)$

(III) $f = f_{\wedge M4}, f_{\vee M4}, f_{\rightarrow M4}$ y $f_{\neg M4}$

$f_{\wedge M4}$ y $f_{\vee M4}$ quedan definidos por la siguiente estructura:



Donde $\forall a, b \in K$, $a \wedge b = min.(a, b)$ y $a \vee b = max.(a, b)$

$f_{\rightarrow M4}$ y $f_{\neg M4}$ quedan definidos de la siguiente manera:

$A \rightarrow B = 3$ syss $A = 0$, $B = 3$ ó $A = B = 1$; $A \rightarrow B = 2$ syss $A = B = 2$ y $A \rightarrow B = 0$ en el resto de los casos.

$\neg A = 0$ syss $A = 3$; $\neg A = 1$ syss $A = 1$; $\neg A = 2$ syss $A = 2$ y $\neg A = 3$ syss $A = 0$

Para facilitar el trabajo al lector, lo anterior puede ser expresado en las siguientes tablas:

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	3	3	3	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	3	0	3
2	0	0	2	3
3	0	0	0	3

	$\neg$
0	3
1	1
2	2
3	0

Nota 1.3 (Interpretación de M4): Los valores de verdad de la matriz pueden ser interpretados de la siguiente manera:

(I) El valor de verdad 0 puede ser interpretado como falsedad absoluta

(II) El valor de verdad 1 puede ser interpretado como la ausencia tanto de verdad, como de falsedad

(III) El valor de verdad 2 puede ser interpretado como la presencia tanto de verdad, como de falsedad

(IV) El valor de verdad 3 puede ser interpretado como verdad absoluta

Nota 1.4 (Divisibilidad de M4): La parte correspondiente al condicional de la matriz M4 es divisible en dos matrices trivaluadas distintas; en una se usará la parte correspondiente a los valores de verdad 0, 1, y 3, dando lugar a la matriz M$S5_3^L$. Por su parte, los valores de verdad 0, 2, y 3 darían lugar a la matriz MRM3. Cada matriz estaría relacionada con el sistema que caracteriza su nombre. Podríamos resumir las matrices en las siguientes tablas:

M$S5_3^L$	0	1	3
0	3	3	3
1	0	3	3
3	0	0	3

MRM3	0	2	3
0	3	3	3
2	0	2	3
3	0	0	3

2 La semántica de M4

Con M4 definida en el apartado anterior, ahora podemos desarrollar la semántica tetravaluada intrínsecamente ligada a la matriz.

2.1 Semántica tetravaluada

Definición 1.5 (M4-interpretación): Una M4-interpretación, I_{M4}, se define como una función desde $\mathfrak{F}$ a K_{M4}, ajustada según la matriz descrita en la Definición 1.2

Definición 1.6 (M4-consecuencia y M4-validez): Para cualquier conjunto de fbf Γ y fbf A, $\Gamma \vDash_{M4} A$, A es consecuencia de Γ en la M4-semántica, syss 2 ó 3 $\in I_{M4}(A)$ siempre que 2 ó 3 $\in I_{M4}(\Gamma)$ para todas las M4-interpretaciones I_{M4} ($I_{M4}(\Gamma) = inf\,\{I_{M4}(B)\,|B \in \Gamma\}$). En particular, $\vDash_{M4} A$, A es válida en la M4-semántica, syss 2 ó 3 $\in I_{M4}(A)$ en todas las M4-interpretaciones I_{M4}. Por $\vDash_{M4}$ nos referimos a la relación que acabamos de definir.

Parte II

Dos axiomatizaciones de la matriz M4: FDF4 y EF4

En esta segunda parte ofreceremos dos axiomatizaciones diferentes para la matriz M4; una basada en el clásico sistema *First Degree Entailment*, FDE, y otra basada en el sistema de la implicación relevante, E. Para ello primero definiremos un sistema débil, FDF+, y una extensión de él, EFDF+, sobre los cuales probaremos teoremas de utilidad a fin de que sean generalizables a los posteriores sistemas. A continuación definiremos una nueva semántica, una semántica bivalente tipo Belnap-Dunn. Desarrollaremos la primera de las dos axiomatizaciones que nos interesan, FDF4, y, gracias a la semántica Belnap-Dunn previamente definida, obtendremos un resultado de corrección fuerte. Probaremos un lema de extensión y otro de primacía para FDF4 y con ellos conseguiremos un resultado de completud fuerte para FDF4. A partir de estos resultados probaremos que FDF4 es una axiomatización de la matriz para, posteriormente, probar su equivalencia a EF4, el sistema basado en E que definiremos en último lugar.

1 Sistemas previos: FDF+ y FDF

Previo al desarrollo de las dos axiomatizaciones principales, probaremos una serie de nociones en base a un sistema débil, FDF+, y su extensión, EFDF+, así como tesis sintácticas que nos serán de utilidad a la hora de afrontar el desarrollo de los sistemas posteriores y la definición de la BD-semántica.

1.1 Definiciones fundamentales

Definición 2.1 (Lógica): Una lógica S es una estructura $(\mathfrak{L}, \ \vdash_S)$, donde $\mathfrak{L}$ es un lenguaje proposicional (Cf. Definición 0.0) y $\vdash_S$ es una relación de consecuencia, definida sobre $\mathfrak{L}$ por un conjunto de axiomas y reglas de derivación. Las nociones de prueba y teorema son entendidas de la manera habitual en los sistemas axiomáticos tipo Hilbert. $\Gamma \vdash_S A$ significa que la fbf A es derivable del conjunto de fbf Γ en S; $\vdash_S A$ significa que la fbf A es un teorema de S

Definición 2.2 (Extensión y expansión de una lógica): Sea S un sistema lógico cualquiera. ES es una extensión de S syss S y ES tienen el mismo lenguaje proposicional $\mathfrak{L}$, y $S \subseteq ES$. ES será una expansión de S syss $S \subseteq ES$ y el lenguaje proposicional $\mathfrak{L}'$ de ES es una ampliación del lenguaje proposicional $\mathfrak{L}$ de S

1.2 El sistema FDF+

Sea la siguiente axiomatización la correspondiente al sistema FDF+:

A1. $A \to A$
A2. $A \wedge B \to .A / A \wedge B \to .B$
A3. $A \to .A \vee B / B \to .A \vee B$
A4. $A \wedge (B \vee C) \to .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
R1. A y $B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \to B$ y $A \Rightarrow B$
R3. $A \to B$ y $B \to C \Rightarrow A \to C$
R4. $A \to B$ y $A \to C \Rightarrow A \to .B \wedge C$
R5. $A \to C$ y $B \to C \Rightarrow A \vee B \to .C$

Dada la axiomatización, trabajaremos sobre EFDF+, que denotará una expansión o extensión cualquiera de FDF+, donde las reglas serán únicamente las de FDF+ y las versiones disyuntivas de Contraposición y Contraejemplo. Procedemos desde aquí a desarrollar una serie de definiciones básicas:

Definición 2.3 (EFDF+-derivabilidad): Para cualquier conjunto de fbf Γ y una fbf cualquiera A, A es derivable de Γ en EFDF+ (en símbolos $\Gamma \vdash_{EFDF+} A$) syss hay una secuencia finita de fbf $B_1, ..., B_n$ tal que B_n es A y para cada B_i tal que $1 \leq i \leq n$ se cumple uno de los siguientes casos:

(I) $B_i \in \Gamma$
(II) B_i es uno de los axiomas expuestos en la axiomatización de EFDF+
(III) B_i es el resultado de aplicar una de las reglas a una o más de las fbf anteriores de la secuencia

Adicionalmente, sean Γ y Θ dos conjuntos de fbf. $\Gamma \vdash_{EFDF+} \Theta$ syss $\Gamma \vdash_{EFDF+} A$ para toda $A \in \Theta$

Definición 2.4 (EFDF+-derivabilidad disyuntiva): Para cualesquiera conjuntos de fbf Γ y Θ, Θ es EFDF+-derivable disyuntivamente de Γ (en símbolos $\Gamma \overset{d}{\vdash}_{EFDF+} \Theta$) syss $A_1 \wedge ... \wedge A_m \vdash_{EFDF+} B_1 \vee ... \vee B_n$ para fbf $A_1, ..., A_m \in \Gamma$ y $B_1, ..., B_n \in \Theta$, siempre que $m, n \geq 1$

Observación 2.5 (Sobre la EFDF+-derivabilidad y la EFDF+-derivabilidad disyuntiva): Para cualesquiera conjuntos de fbf Γ y Θ. Si $\Gamma \vdash_{EFDF+} \Theta$, entonces $\Gamma \overset{d}{\vdash}_{EFDF+} \Theta$. Sin embargo, la conversa no se sigue, a no ser que $\Theta = \{A\}$: $\Gamma \vdash_{EFDF+} A$ syss $\Gamma \overset{d}{\vdash}_{EFDF+} A$

Prueba:

Supongamos que $\Gamma \vdash_{EFDF+} \Theta$ y sea $A \in \Theta$. Entonces $\Gamma \vdash_{EFDF+} A$ por la Definición 2.3. Consideramos entonces tres posibilidades:

(I) Las fórmulas usadas en la EFDF+-derivación $\Gamma \vdash_{EFDF+} A$ están en la lista $B_1, ..., B_n$. Entonces $B_i \wedge ... \wedge B_n \vdash_{EFDF+} A$ por la Definición 2.3 de nuevo, y, entonces, $\Gamma \overset{d}{\vdash}_{EFDF+} A$, por la Definición 2.4

(II) No se usan fbf de Γ en la EFDF+-derivación $\Gamma \vdash_{EFDF+} A$, lo cual significa que $\vdash_{EFDF+} A$. Ahora, sean $B_1, ..., B_n \in \Gamma$. Por la Definición 2.3 $B_1 \wedge ... \wedge B_n \vdash_{EFDF+} A$ y, entonces, $\Gamma \vdash_{EFDF+} A$ por la Definición 2.3 otra vez.

(III) Si $\Gamma \overset{d}{\vdash}_{EFDF+} A$, quiere decir que $B_1 \wedge ... \wedge B_n \vdash_{EFDF+} A$, lo cual es equivalente a decir que $\Gamma \vdash_{EFDF+} A$.

■

1.2.1 Tesis de interés de EFDF+

A continuación probaremos sintácticamente una serie de teoremas de EFDF+:

Asociativa de la Conjunción: $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow .A \wedge (B \wedge C)$

1. $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow .A \wedge B$	A2
2. $A \wedge B \rightarrow .A$	A2
3. $A \wedge B \rightarrow .B$	A2
4. $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow .A$	R3, 1, 2
5. $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow .B$	R3, 1, 3
6. $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow .C$	A2
7. $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow .B \wedge C$	R4, 5, 6
8. $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow .(B \wedge C) \wedge A$	R4, 4, 7

Asociativa de la Disyunción: $(A \vee B) \vee C \rightarrow .A \vee (B \vee C)$

1. $A \rightarrow .A \vee (B \vee C)$	A3
2. $B \vee C \rightarrow .A \vee (B \vee C)$	A3
3. $B \rightarrow .B \vee C$	A3
4. $C \rightarrow .B \vee C$	A3
5. $B \rightarrow .A \vee (B \vee C)$	R3, 2, 3
6. $C \rightarrow .A \vee (B \vee C)$	R3, 2, 4
7. $A \vee B \rightarrow .A \vee (B \vee C)$	R5, 1, 5
8. $(A \vee B) \vee C \rightarrow .A \vee (B \vee C)$	R5, 6, 7

Distribución:
(I) $(A \vee B) \wedge C \rightarrow .A \vee (B \wedge C)$

1. $(A \vee B) \wedge C \rightarrow .(C \wedge A) \vee (C \wedge B)$	A4
2. $C \wedge A \rightarrow .A$	A2
3. $A \rightarrow .A \vee (B \wedge C)$	A3
4. $C \wedge A \rightarrow .A \vee (B \wedge C)$	R3, 2, 3
5. $C \wedge B \rightarrow .A \vee (B \wedge C)$	A3
6. $(C \wedge A) \vee (C \wedge B) \rightarrow .A \vee (B \wedge C)$	R5, 4, 5
7. $(A \vee B) \wedge C \rightarrow .A \vee (B \wedge C)$	R3, 1, 6

(II) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to .A \wedge (B \vee C)$

1. $A \wedge B \to .A$	A2
2. $A \wedge C \to .A$	A2
3. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to .A$	R5, 1, 2
4. $C \to .B \vee C$	A3
5. $A \wedge C \to .C$	A2
6. $A \wedge C \to .B \vee C$	R3, 4, 5
7. $A \wedge B \to .B$	A2
8. $B \to .B \vee C$	A3
9. $A \wedge B \to .B \vee C$	R3, 7, 8
10. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to .B \vee C$	R5, 6, 9
11. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to .A \wedge (B \vee C)$	R4, 3, 10

(III) $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \to .A \vee (B \wedge C)$

1. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \to .((A \vee B) \wedge A) \vee ((A \vee B) \wedge C)$	A4
2. $(A \vee B) \wedge A \to .A$	A2
3. $A \to .A \vee (B \wedge C)$	A3
4. $(A \vee B) \wedge A \to .A \vee (B \wedge C)$	R3, 2, 3
5. $(A \vee B) \wedge C \to .A \vee (B \wedge C)$	Distribución (I)
6. $((A \vee B) \wedge A) \vee ((A \vee B) \wedge C) \to .A \vee (B \wedge C)$	R5, 4, 5
7. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \to .A \vee (B \wedge C)$	R3, 1, 6

(IV) $A \vee (B \wedge C) \to .(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

1. $A \to .A \vee B$	A3
2. $A \to .A \vee C$	A3
3. $A \to .(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	R4, 1, 2
4. $B \wedge C \to .B$	A2
5. $B \to .A \vee B$	A3
6. $B \wedge C \to .A \vee B$	R3, 4, 5
7. $B \wedge C \to .C$	A2
8. $C \to .A \vee C$	A3
9. $B \wedge C \to .A \vee C$	R3, 7, 8
10. $B \wedge C \to .(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	R4, 6, 9
11. $A \vee (B \wedge C) \to .(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	R5, 3, 10

Sumación: $A \to B \Rightarrow (C \vee A) \to (C \vee B)$

1. $A \to B$	Hipótesis
2. $B \to .B \vee C$	A3
3. $A \to .B \vee C$	R3, 1, 2
4. $C \to .B \vee C$	A3
5. $A \vee C \to .B \vee C$	R5, 3, 4

Producto: $A \to B \Rightarrow C \wedge A \to .C \wedge B$

1. $A \to B$	Hipótesis
2. $C \wedge A \to .A$	A2
3. $C \wedge A \to .B$	R3, 1, 2
4. $C \wedge A \to .C$	A2
5. $C \wedge A \to .C \wedge B$	R4, 3, 4

Idempotencia de la Disyunción:
(I) $A \to .A \vee A$

1. $A \to .A \vee A$	A3

(II) $A \vee A \to .A$

1. $A \to A$	A1
2. $A \to A$	A1
3. $A \vee A \to .A$	R5, 1, 2

1.2.2 Teoremas utilidad

En este apartado procederemos a probar una serie de teoremas que servirán para caracterizar la EFDF+-derivabilidad y cuya utilidad quedará probada más adelante. Previo a ello es importante señalar la inclusión de las versiones disyuntivas de Contraposición y Contrajemplo. Aunque en un primer momento pueda resultar extraño, la utilidad de esta versión de las reglas habituales quedará patente a la hora de desarrollar el Lema de Extensión que se usará ampliamente a lo largo de todo el trabajo. Estamos, por tanto, ante una decisión extraña en un primer momento, pero que tras haber obtenido los resultados finales, estará ampliamente justificada.

Teorema 2.6 (Propiedad de la EFDF+-derivabilidad I): Si $\Gamma \vdash_{EFDF+} \Theta$ y $\Theta \vdash_{EFDF+} A$, entonces se cumple que $\Gamma \vdash_{EFDF+} A$

Prueba:
Desarrollamos la prueba por inducción sobre k, la longitud de la prueba de $\Theta \vdash_{EFDF+} A$

(I) Para $k = 1$: O bien A es un axioma, con lo que tenemos $\Gamma \vdash_{EFDF+} A$ por la Definición 2.3, o bien $A \in \Theta$ para lo que nos remitimos a la prueba de la Observación 2.5

(II) Para $k \leq n$, donde $n \in \mathbb{N}$: Se trata de la hipótesis de inducción: $\Gamma \vdash_{EFDF+} A$ y $\Theta \vdash_{EFDF+} A \Rightarrow \Gamma \vdash_{EFDF+} A$. La secuencia de fbf para la prueba de $\Theta \vdash_{EFDF+} A$ consta, como mucho, de n fbf

(III) Para $k = n + 1$: La secuencia tiene $n + 1$ elementos, con lo cual A ha de aparecer por alguna de las reglas de EFDF+

(a) A aparece por R1: A tiene la forma $B \wedge C$, con lo cual tenemos $\Theta \vdash_{EFDF+} B$ y $\Theta \vdash_{EFDF+} C$. Por la hipótesis de inducción obtenemos $\Gamma \vdash_{EFDF+} B$ y $\Gamma \vdash_{EFDF+} C$, lo cual, por R1 nos proporciona $\Gamma \vdash_{EFDF+} B \wedge C$, siendo este el resultado pretendido.

(b) A aparece por R2: A tiene la forma C y tenemos que $\Theta \vdash_{EFDF+} B$ y $\Theta \vdash_{EFDF+} B \rightarrow C$. Al igual que en el caso anterior, por la hipótesis de inducción obtenemos $\Gamma \vdash_{EFDF+} B$ y $\Gamma \vdash_{EFDF+} B \rightarrow C$, y aplicando R2 conseguimos $\Gamma \vdash_{EFDF+} C$, tal y como queríamos.

(c) A aparece por R3: A tiene la forma $B \rightarrow D$ y sabemos que $\Theta \vdash_{EFDF+} B \rightarrow C$ y $\Theta \vdash_{EFDF+} C \rightarrow D$. Por la hipótesis de inducción tenemos $\Gamma \vdash_{EFDF+} B \rightarrow C$ y $\Gamma \vdash_{EFDF+} C \rightarrow D$. Por R3 obtenemos $\Gamma \vdash_{EFDF+} B \rightarrow D$, el resultado buscado.

(d) A aparece por R4: A tiene la forma $B \rightarrow (C \wedge D)$ y tenemos $\Theta \vdash_{EFDF+} B \rightarrow C$ y $\Theta \vdash_{EFDF+} B \rightarrow D$. Gracias a la hipótesis de inducción obtenemos $\Gamma \vdash_{EFDF+} B \rightarrow C$ y $\Gamma \vdash_{EFDF+} B \rightarrow D$. Gracias a R4 concluimos $\Gamma \vdash_{EFDF+} B \rightarrow (C \wedge D)$.

(e) A aparece por R5: A tiene la forma $(B \vee C) \rightarrow D$ y tenemos que $\Theta \vdash_{EFDF+} B \rightarrow D$ y $\Theta \vdash_{EFDF+} C \rightarrow D$. De manera similar a los casos anteriores, por la hipótesis de inducción obtenemos $\Gamma \vdash_{EFDF+} B \rightarrow D$ y $\Gamma \vdash_{EFDF+} C \rightarrow D$, y aplicando R5 conseguimos $\Gamma \vdash_{EFDF+} (B \vee C) \rightarrow D$, tal y como queríamos.

En caso de querer utilizar este Teorema en expansiones que incorporen nuevas reglas, habríamos de modificar la prueba incorporando estas; por ello daremos las pruebas necesarias para las reglas que más adelante se utilizarán en las diferentes expansiones, pudiendo hacer referencia a este mismo teorema sin problema:

(f) A aparece por Contraposición en su forma disyuntiva: A tiene la forma $D \vee (\neg C \rightarrow \neg B)$ y sabemos que $\Theta \vdash_{EFDF+} D \vee (B \rightarrow C)$. Por la hipótesis de inducción tenemos $\Gamma \vdash_{EFDF+} D \vee (B \rightarrow C)$. Por Contraposición en su forma disyuntiva obtenemos $\Gamma \vdash_{EFDF+} D \vee (\neg C \rightarrow \neg B)$, el resultado buscado.

(g) A aparece por Contraejemplo en su forma disyuntiva: A tiene la forma $D \vee \neg (B \rightarrow C)$ y sabemos que $\Theta \vdash_{EFDF+} D \vee B$ y $\Theta \vdash_{EFDF+} D \vee \neg C$. Por la hipótesis de inducción tenemos $\Gamma \vdash_{EFDF+} D \vee B$ y $\Gamma \vdash_{EFDF+} D \vee \neg C$. Por Contraejemplo en su forma disyuntiva obtenemos $\Gamma \vdash_{EFDF+} D \vee \neg (B \rightarrow C)$, el resultado buscado.

■

Teorema 2.7 (Propiedad de la EFDF+-derivabilidad II): (I) Si $\vdash_{EFDF+} A$ entonces $\Gamma \vdash_{EFDF+} A$

(II) Si $A \vdash_{EFDF+} B$ y $\vdash_{EFDF+} B \rightarrow C$ entonces $A \vdash_{EFDF+} C$

(III) Si $B \vdash_{EFDF+} C$ y $\vdash_{EFDF+} A \rightarrow B$ entonces $A \vdash_{EFDF+} C$

Prueba:
(I) La prueba es idéntica a la del punto (II) de la Observación 2.5
(II) Primero probamos (a) Si $\vdash_{EFDF+} B \to C$, entonces $B \vdash_{EFDF+} C$:

1. $\vdash_{EFDF+} B$	Hipótesis
2. $\vdash_{EFDF+} B \to C$	Hipótesis
3. $\vdash_{EFDF+} C$	R2, 1, 2
4. $B \vdash_{EFDF+} C$	Definición 2.3, 3

Ahora ya podemos proceder a la prueba de (II):

1. $A \vdash_{EFDF+} B$	Hipótesis
2. $\vdash_{EFDF+} B \to C$	Hipótesis
3. $B \vdash_{EFDF+} C$	Teorema 2.7.(II).(a), 2
4. $A \vdash_{EFDF+} C$	Teorema 2.6, 1, 3

(III) Procedemos a la prueba directamente:

1. $B \vdash_{EFDF+} C$	Hipótesis
2. $\vdash_{EFDF+} A \to B$	Hipótesis
3. $A \vdash_{EFDF+} B$	Teorema 2.7.(II).(a), 2
4. $A \vdash_{EFDF+} C$	Teorema 2.6, 1, 3

Así concluyen las pruebas del Teorema 2.7
■

Teorema 2.8 (Propiedad de la EFDF+-derivabilidad III): Sean $B_1, ..., B_m$, $C_1, ..., C_n$ y A_{i+1} fbf cualesquiera y B, B' y B'' conjunciones de fbf tales que $B = B_1 \wedge ... \wedge B_n$, B' es una conjunción de elementos distinta de B, y $B'' = B \wedge B'$; C, C' y C'' son disyunciones de fbf tales que $C = C_1 \vee ... \vee C_m$, C' es una disyunción de fbf distinta de C, y $C'' = C \wedge C'$. Se puede afirmar que si $B' \wedge A_{i+1} \vdash_{EFDF+} C'$ entonces $B'' \wedge A_{i+1} \vdash_{EFDF+} C''$

Prueba:

1. $B' \wedge A_{i+1} \vdash_{EFDF+} C'$	Hipótesis
2. $\vdash_{EFDF+} C' \to .C' \vee C$	A3
3. $B' \wedge A_{i+1} \vdash_{EFDF+} C' \vee C$	Teorema 2.7.(II), 1, 2
4. $\vdash_{EFDF+} B \wedge (B' \wedge A_{i+1}) \to .B' \wedge A_{i+1}$	A2
5. $B \wedge (B' \wedge A_{i+1}) \vdash_{EFDF+} C' \vee C$	Teorema 2.7.(III), 3, 4
6. $\vdash_{EFDF+} (B \wedge B') \wedge A_{i+1} \to .B \wedge (B' \wedge A_{i+1})$	Asociativa de la Conjunción
7. $(B \wedge B') \wedge A_{i+1} \vdash_{EFDF+} C' \vee C$	Teorema 2.7.(III), 5, 6

7, por las definiciones que hemos incluido al principio del teorema, es el resultado pretendido: $B'' \wedge A_{i+1} \vdash_{EFDF+} C''$
■

Teorema 2.9 (Propiedad de la EFDF+-derivabilidad IV): Sean $B_1, ..., B_m$, $C_1, ..., C_n$, A_{i+1}, B, B', B'', C, C' y C'' los conceptos definidos en el Teorema 2.8. Por tanto, si $B \vdash_{EFDF+} C \vee A_{i+1}$, entonces $B'' \vdash_{EFDF+} C'' \vee A_{i+1}$

Prueba:

1. $B \vdash_{EFDF+} C \vee A_{i+1}$	Hipótesis
2. $\vdash_{EFDF+} B \wedge B' \rightarrow .B$	A2
3. $B \wedge B' \vdash_{EFDF+} C \vee A_{i+1}$	Teorema 2.7.(III), 1, 2
4. $\vdash_{EFDF+} C \vee A_{i+1} \rightarrow .C' \vee (C \vee A_{i+1})$	A3
5. $B \wedge B' \vdash_{EFDF+} C' \vee (C \vee A_{i+1})$	Teorema 2.7.(II), 3, 4
6. $\vdash_{EFDF+} C' \vee (C \vee A_{i+1}) \rightarrow .(C' \vee C) \vee A_{i+1}$	Asociativa de la Disyunción
7. $B \wedge B' \vdash_{EFDF+} (C' \vee C) \vee A_{i+1}$	Teorema 2.7.(II), 5, 6

Pero, de nuevo, por las definiciones anteriores, 7 es $B'' \vdash_{EFDF+} C'' \vee A_{i+1}$, la conclusión buscada.

■

Teorema 2.10 (Propiedad de la EFDF+-derivabilidad V): Siendo $B_1, ..., B_m$, $C_1, ..., C_n$, A_{i+1}, B, B', B'', C, C' y C'' los conceptos ya usados en los Teoremas 2.8 y 2.9, si $B'' \vdash_{EFDF+} C'' \vee A_{i+1}$, entonces $B'' \vdash_{EFDF+} C'' \vee (B'' \wedge A_{i+1})$

Prueba:

1. $B'' \vdash_{EFDF+} C'' \vee A_{i+1}$	Hipótesis
2. $\vdash_{EFDF+} B'' \rightarrow .C'' \vee B''$	A3
3. $B'' \vdash_{EFDF+} C'' \vee B''$	Teorema 2.7.(II).(a), 2
4. $B'' \vdash_{EFDF+} (C'' \vee B'') \wedge (C'' \vee A_{i+1})$	R1, 1, 3
5. $\vdash_{EFDF+} (C'' \vee B'') \wedge (C'' \vee A_{i+1}) \rightarrow .C'' \vee (B'' \wedge A_{i+1})$	Distribución (III)
6. $B'' \vdash_{EFDF+} C'' \vee (B'' \wedge A_{i+1})$	Teorema 2.7.(II), 4, 5

■

1.3 El sistema FDF

El sistema FDF se define como una expansión negativa, una expansión que añade la conectiva de la negación, de FDF+; sea la siguiente axiomatización la correspondiente a este sistema:

A1. $A \rightarrow A$
A2. $A \wedge B \rightarrow .A / A \wedge B \rightarrow .B$
A3. $A \rightarrow .A \vee B / B \rightarrow .A \vee B$
A4. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A5. $A \rightarrow .\neg\neg A$
A6. $\neg\neg A \rightarrow .A$
R1. A y $B \Rightarrow A \wedge B$

R2. $A \to B$ y $A \Rightarrow B$
R3. $A \to B$ y $B \to C \Rightarrow A \to C$
R4. $A \to B$ y $A \to C \Rightarrow A \to .B \wedge C$
R5. $A \to C$ y $B \to C \Rightarrow A \vee B \to .C$
R6. $A \to B \Rightarrow \neg B \to \neg A$

1.3.1 Tesis de interés del sistema FDF

Proporcionamos las pruebas sintácticas para una serie de teoremas de FDF:

De Morgan:
(I) $\neg (A \vee B) \to .\neg A \wedge \neg B$

1. $A \to .A \vee B$	A3
2. $\neg (A \vee B) \to \neg A$	R6, 1
3. $B \to .A \vee B$	A3
4. $\neg (A \vee B) \to \neg B$	R6, 3
5. $\neg (A \vee B) \to .\neg A \wedge \neg B$	R4, 2, 4

(II) $A \vee B \to .\neg (\neg A \wedge \neg B)$

1. $\neg A \wedge \neg B \to .\neg A$	A2
2. $\neg\neg A \to .\neg (\neg A \wedge \neg B)$	R6, 1
3. $A \to .\neg (\neg A \wedge \neg B)$	A5, 2
4. $\neg A \wedge \neg B \to .\neg B$	A2
5. $\neg\neg B \to .\neg (\neg A \wedge \neg B)$	R6, 4
6. $B \to .\neg (\neg A \wedge \neg B)$	A5, 5
7. $A \vee B \to .\neg (\neg A \wedge \neg B)$	R5, 3, 6

(III) $\neg A \wedge \neg B \to .\neg (A \vee B)$

1. $\neg A \wedge \neg B \to .\neg A$	A2
2. $\neg\neg A \to .\neg (\neg A \wedge \neg B)$	R6, 1
3. $A \to .\neg (\neg A \wedge \neg B)$	A5, 2
4. $\neg A \wedge \neg B \to .\neg B$	A2
5. $\neg\neg B \to .\neg (\neg A \wedge \neg B)$	R6, 4
6. $B \to .\neg (\neg A \wedge \neg B)$	A5, 5
7. $A \vee B \to .\neg (\neg A \wedge \neg B)$	R5, 3, 6
8. $\neg\neg (\neg A \wedge \neg B) \to .\neg (A \vee B)$	R6, 7
9. $\neg A \wedge \neg B \to .\neg (A \vee B)$	A5, 8

(IV) $\neg (\neg A \wedge \neg B) \to .A \vee B$

1. $A \to .A \vee B$	A3
2. $\neg (A \vee B) \to \neg A$	R6, 1
3. $B \to .A \vee B$	A3

4. $\neg(A \vee B) \to \neg B$	R6, 3
5. $\neg(A \vee B) \to .\neg A \wedge \neg B$	R4, 2, 4
6. $\neg(\neg A \wedge \neg B) \to .\neg\neg(A \vee B)$	R6, 5
7. $\neg(\neg A \wedge \neg B) \to .A \vee B$	A6, 6

(V) $\neg(A \wedge B) \to .\neg A \vee \neg B$

1. $\neg A \to .\neg A \vee \neg B$	A3
2. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to .\neg\neg A$	R6, 1
3. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to .A$	A6, 2
4. $\neg B \to .\neg A \vee \neg B$	A3
5. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to .\neg\neg B$	R6, 4
6. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to .B$	A6, 5
7. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to .A \wedge B$	R4, 3, 6
8. $\neg(A \wedge B) \to .\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$	R6, 7
9. $\neg(A \wedge B) \to .\neg A \vee \neg B$	A6, 8

(VI) $A \wedge B \to .\neg(\neg A \vee \neg B)$

1. $A \wedge B \to A$	A2
2. $\neg A \to .\neg(A \wedge B)$	R6, 1
3. $A \wedge B \to .B$	A2
4. $\neg B \to .\neg(A \wedge B)$	R6, 3
5. $\neg A \vee \neg B \to .\neg(A \wedge B)$	R5, 2, 4
6. $\neg\neg(A \wedge B) \to .\neg(\neg A \vee \neg B)$	R6, 5
7. $A \wedge B \to .\neg(\neg A \vee \neg B)$	A5, 6

(VII) $\neg A \vee \neg B \to .\neg(A \wedge B)$

1. $A \wedge B \to A$	A2
2. $\neg A \to .\neg(A \wedge B)$	R6, 1
3. $A \wedge B \to .B$	A2
4. $\neg B \to .\neg(A \wedge B)$	R6, 3
5. $\neg A \vee \neg B \to .\neg(A \wedge B)$	R5, 2, 4

(VIII) $\neg(\neg A \vee \neg B) \to .A \wedge B$

1. $\neg A \to .\neg A \vee \neg B$	A3
2. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to .\neg\neg A$	R6, 1
3. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to .A$	A6, 2
4. $\neg B \to .\neg A \vee \neg B$	A3
5. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to .\neg\neg B$	R6, 4
6. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to .B$	A6, 5
7. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to .A \wedge B$	R4, 3, 6

2 Semántica bivalente tipo Belnap-Dunn

La semántica Belnap-Dunn se corresponde con una semántica de tipo bivalente, con sólo dos valores de verdad; en este caso la semántica únicamente posee los valores de verdad Verdadero y Falso. Sin embargo, pese a lo que pudiese parecer, se trata de una herramienta de gran interés a la hora de estudiar matrices lógicas (Cf. [Dunn, 1976a])

Definición 2.11 (BD-modelos): Un BD-modelo es una estructura $\left(K^4_{BD},\ I_{BD}\right)$, donde $K^4_{BD} = \{\{T\},\ \{F\},\ \{T,\ F\},\ \varnothing\}$ y I_{BD} es una interpretación desde $\mathfrak{F}$ a K^4_{BD}, definida como sigue:

Para las variables proposicionales, p_i, se asigna uno de los elementos de K^4_{BD}.
Para las fórmulas bien formadas se cumplen las siguientes cláusulas:
(I) Conjunción:
(a) $F \in I_{BD}\,(A \wedge B)$ syss $F \in I_{BD}\,(A)$ ó $F \in I_{BD}\,(B)$
(b) $T \in I_{BD}\,(A \wedge B)$ syss $T \in I_{BD}\,(A)$ y $T \in I_{BD}\,(B)$
(II) Disyunción:
(a) $F \in I_{BD}\,(A \vee B)$ syss $F \in I_{BD}\,(A)$ y $F \in I_{BD}\,(B)$
(b) $T \in I_{BD}\,(A \vee B)$ syss $T \in I_{BD}\,(A)$ ó $T \in I_{BD}\,(B)$
(III) Negación:
(a) $F \in I_{BD}\,(\neg A)$ syss $T \in I_{BD}\,(A)$
(b) $T \in I_{BD}\,(\neg A)$ syss $F \in I_{BD}\,(A)$

Definición 2.12 (BD-consecuencia y BD-validez): Para cualquier conjunto de fbf Γ y fbf A, $\Gamma \vDash_{BD-M} A$, A es consecuencia de Γ en un BD-modelo M, syss $T \in I_{BD}\,(A)$ siempre que $T \in I_{BD}\,(\Gamma)$, donde $T \in I_{BD}\,(\Gamma)$ syss $\forall B \in \Gamma\,(T \in I_{BD}\,(B))$; $F \in I_{BD}\,(\Gamma)$ syss $\exists B \in \Gamma\,(F \in I_{BD}\,(B))$. En particular, $\vDash_{BD-M} A$, A es verdad en M, syss $T \in I_{BD}\,(A)$. Entonces, $\Gamma \vDash_{BD} A$, A es consecuencia de Γ en la BD-semántica, syss $\Gamma \vDash_{BD-M} A$ en cada BD-modelo M. En particular, $\vDash_{BD} A$, A es válida en la BD-semántica, syss $\vDash_{BD-M} A$ para cada BD-modelo M. Por $\vDash_{BD}$ nos referimos a la relación que acabamos de definir.

La semántica bivalente Belnap-Dunn es una semántica que carece de cláusula para el condicional, ya que se trata de la semántica creada para tratar FDE, el cual carece una implicación característica. Por esto nos vemos obligados a incluir ahora una nueva definición que permita la constitución de una BD-semántica equivalente a la M4-semántica que hemos definido con anterioridad.

Definición 2.13 (Clausula para el condicional): Sean las siguientes clausulas las correspondientes al condicional:

(I) $F \in I_{BD}\,(A \to B)$ syss $(T \in I_{BD}\,(A)$ y $F \in I_{BD}\,(B))$ ó $(F \notin I_{BD}\,(A)$ y $F \in I_{BD}\,(B))$ ó $(T \in I_{BD}(A)$ y $T \notin I_{BD}\,(B))$

(II) $T \in I_{BD}\,(A \to B)$ syss $(T \notin I_{BD}(A)$ ó $T \in I_{BD}\,(B))$ y $(F \notin I_{BD}\,(B)$ ó $F \in I_{BD}\,(A))$

3 Equivalencia de la M4-semántica y la BD-semántica

Para el correcto desarrollo de la prueba, y una exposición más simple, desarrollamos la siguiente observación:

Observación 2.14 (Cláusulas según la matriz M4): De acuerdo a las M4-interpretaciones desarrolladas en la Definición 1.5 y a la matriz M4 expuesta en la Definición 1.2, podemos dar las siguientes cláusulas para las conectivas allí expuestas:

(I) Conjunción:

(a) $0 \in I_{M4}(A \wedge B)$ syss $0 \in I_{M4}(A)$, $0 \in I_{M4}(B)$, ($2 \in I_{M4}(A)$ y $1 \in I_{M4}(B)$) ó ($1 \in I_{M4}(A)$ y $2 \in I_{M4}(B)$)

(b) $1 \in I_{M4}(A \wedge B)$ syss ($1 \in I_{M4}(A)$ y $1 \in I_{M4}(B)$), ($3 \in I_{M4}(A)$ y $1 \in I_{M4}(B)$) ó ($1 \in I_{M4}(A)$ y $3 \in I_{M4}(B)$)

(c) $2 \in I_{M4}(A \wedge B)$ syss ($2 \in I_{M4}(A)$ y $2 \in I_{M4}(B)$), ($3 \in I_{M4}(A)$ y $2 \in I_{M4}(B)$) ó ($2 \in I_{M4}(A)$ y $3 \in I_{M4}(B)$)

(d) $3 \in I_{M4}(A \wedge B)$ syss $3 \in I_{M4}(A)$ y $3 \in I_{M4}(B)$

(II) Disyunción:

(a) $0 \in I_{M4}(A \vee B)$ syss $0 \in I_{M4}(A)$ y $0 \in I_{M4}(B)$

(b) $1 \in I_{M4}(A \vee B)$ syss ($1 \in I_{M4}(A)$ y $1 \in I_{M4}(B)$), ($1 \in I_{M4}(A)$ y $0 \in I_{M4}(B)$) ó ($0 \in I_{M4}(A)$ y $1 \in I_{M4}(B)$)

(c) $2 \in I_{M4}(A \vee B)$ syss ($2 \in I_{M4}(A)$ y $0 \in I_{M4}(B)$), ($0 \in I_{M4}(A)$ y $2 \in I_{M4}(B)$) ó ($2 \in I_{M4}(A)$ y $2 \in I_{M4}(B)$)

(d) $3 \in I_{M4}(A \vee B)$ syss ($2 \in I_{M4}(A)$ y $1 \in I_{M4}(B)$), ($1 \in I_{M4}(A)$ y $2 \in I_{M4}(B)$), $3 \in I_{M4}(A)$ ó $3 \in I_{M4}(B)$

(III) Negación:

(a) $0 \in I_{M4}(\neg A)$ syss $3 \in I_{M4}(A)$

(b) $1 \in I_{M4}(\neg A)$ syss $1 \in I_{M4}(A)$

(c) $2 \in I_{M4}(\neg A)$ syss $2 \in I_{M4}(A)$

(d) $3 \in I_{M4}(\neg A)$ syss $0 \in I_{M4}(A)$

(IV) Condicional:

(a) $0 \in I_{M4}(A \to B)$ syss ($0 \notin I_{M4}(A)$ y $0 \in I_{M4}(B)$), ($2 \in I_{M4}(A)$ y $1 \in I_{M4}(B)$), ($1 \in I_{M4}(A)$ y $2 \in I_{M4}(B)$) ó ($3 \in I_{M4}(A)$ y $3 \notin I_{M4}(B)$)

(b) $2 \in I_{M4}(A \to B)$ syss $2 \in I_{M4}(A)$ y $2 \in I_{M4}(B)$

(c) $3 \in I_{M4}(A \to B)$ syss $0 \in I_{M4}(A)$, $3 \in I_{M4}(B)$ ó ($1 \in I_{M4}(A)$ y $1 \in I_{M4}(B)$)

Definición 2.15 (BD-Interpretación correspondiente a una M4-interpretación): Sea I_{M4} una M4-interpretación. Entonces se define una BD-interpretación I_{BD} correspondiente como sigue:

Para cada variable proposicional p_i:

(I) $I_{M4}(p_i) = 0$ syss $I_{BD}(p_i) = \{F\}$ y $I_{BD}(P_i) \neq \{T\}$

(II) $I_{M4}(p_i) = 1$ syss $I_{BD}(p_i) = \varnothing$

(III) $I_{M4}(p_i) = 2$ syss $I_{BD}(p_i) = \{T,\ F\}$

(IV) $I_{M4}(p_i) = 3$ syss $I_{BD}(p_i) = \{T\}$ y $I_{BD}(P_i) \neq \{F\}$

Lema 2.16 (Correspondencia de las I_{M4} con respecto a las I_{BD}): A partir de la Definición 2.15 extendemos la equivalencia de las variables proposicionales a las fbf:

Para una fbf cualquiera A se cumple:
(I) $I_{M4}(A) = 0$ syss $I_{BD}(A) = \{F\}$ y $I_{BD}(A) \neq \{T\}$
(II) $I_{M4}(A) = 1$ syss $I_{BD}(A) = \varnothing$
(III) $I_{M4}(A) = 2$ syss $I_{BD}(A) = \{T,\ F\}$
(IV) $I_{M4}(A) = 3$ syss $I_{BD}(A) = \{T\}$ y $I_{BD}(A) \neq \{F\}$

Prueba:
A fin de probar la correspondencia de las I_{M4} y las I_{BD}, hemos de demostrar la equivalencia en la valoración de las fbf con respecto a todos los valores de verdad. Para ello procederemos por inducción sobre k, la complejidad de la fórmula. Probaremos cada paso en los dos sentidos antes de proceder al siguiente. Sean B y C fbf cualesquiera::

(I) Para $k = 1$, A es una variable proposicional y se sigue automáticamente por la Definición 2.14

(II) Para $k \leq n$, donde $n \in \mathbb{N}$, asumimos la hipótesis de inducción

(III) Para $k = n + 1$ existen 4 subcasos:

(a) $0 \in I_{M4}(A)$ syss $F \in I_{BD}(A)$ y $T \notin I_{BD}(A)$

(i) A aparece como una conjunción y, por tanto, tiene la forma $B \wedge C$

De izquierda a derecha:
(α) $0 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$ y según la cláusula (I) de la Definición 2.11 tenemos $F \in I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \notin I_{BD}(B \wedge C)$
(β) $0 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$ y según la cláusula (I) de la Definición 2.11 tenemos $F \in I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \notin I_{BD}(B \wedge C)$
(γ) $0 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$ y según la cláusula (I) de la Definición 2.11 tenemos $F \in I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \notin I_{BD}(B \wedge C)$
(δ) $0 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$ y según la cláusula (I) de la Definición 2.11 tenemos $F \in I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \notin I_{BD}(B \wedge C)$
(ε) $1 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$ y según la cláusula (I) de la Definición 2.11 tenemos $F \in I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \notin I_{BD}(B \wedge C)$
(ζ) $2 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$ y según la cláusula (I) de la Definición 2.11 tenemos $F \in I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \notin I_{BD}(B \wedge C)$

(η) $3 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$ y según la cláusula (I) de la Definición 2.11 tenemos $F \in I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \notin I_{BD}(B \wedge C)$

(ϑ) $2 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$ y según la cláusula (I) de la Definición 2.11 tenemos $F \in I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \notin I_{BD}(B \wedge C)$

(ι) $1 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$ y según la cláusula (I) de la Definición 2.11 tenemos $F \in I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \notin I_{BD}(B \wedge C)$

De derecha a izquierda:

(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción conseguimos $0 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (I).(a) de la Observación 2.14 obtenemos $0 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(β) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción conseguimos $0 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (I).(a) de la Observación 2.14 obtenemos $0 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(γ) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción conseguimos $0 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (I).(a) de la Observación 2.14 obtenemos $0 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(δ) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción conseguimos $0 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (I).(a) de la Observación 2.14 obtenemos $0 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(ε) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción conseguimos $1 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (I).(a) de la Observación 2.14 obtenemos $0 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(ζ) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción conseguimos $2 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (I).(a) de la Observación 2.14 obtenemos $0 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(η) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción conseguimos $3 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (I).(a) de la Observación 2.14 obtenemos $0 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(ϑ) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción conseguimos $2 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (I).(a) de la Observación 2.14 obtenemos $0 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(ι) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción conseguimos $1 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (I).(a) de la Observación 2.14 obtenemos $0 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(ii) A aparece como una disyunción y, por tanto, tiene la forma $B \vee C$

De izquierda a derecha:

(α) $0 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$; a través de la Hipótesis de inducción tenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y por la cláusula (II) de la Definición 2.11 conseguimos $F \in I_{BD}(B \vee C)$ y $T \notin I_{BD}(B \vee C)$

De derecha a izquierda:

(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; por la Hipótesis de inducción conseguimos $0 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$, y a través de la cláusula (II).(a) de la Observación 2.14 tenemos $0 \in I_{M4}(B \vee C)$

(iii) A aparece como una negación y, por tanto, tiene la forma $\neg B$:

De izquierda a derecha:

(α) $3 \in I_{M4}(B)$; a través de la Hipótesis de inducción obtenemos $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$ y gracias a la cláusula (III) de la Definición 2.11 llegamos a $F \in I_{BD}(\neg B)$ y $T \notin I_{BD}(\neg B)$

De derecha a izquierda:

(α) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$; por medio de la Hipótesis de inducción se consigue $3 \in I_{M4}(B)$ y por la cláusula (III).(a) de la Observación 2.14 tenemos $0 \in I_{M4}(\neg B)$

(iv) A aparece como un condicional y, por tanto, tiene la forma $B \to C$:

De izquierda a derecha:

(α) $1 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción se obtiene $F \notin I_{BD}(B)$y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y por medio de la cláusula (I) de la Definición 2.13 conseguimos $F \in I_{BD}(B \to C)$ y $T \notin I_{BD}(B \to C)$

(β) $2 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción se obtiene $F \in I_{BD}(B)$y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y por medio de la cláusula (I) de la Definición 2.13 conseguimos $F \in I_{BD}(B \to C)$ y $T \notin I_{BD}(B \to C)$

(γ) $3 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción se obtiene $F \notin I_{BD}(B)$y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y por medio de la cláusula (I) de la Definición 2.13 conseguimos $F \in I_{BD}(B \to C)$ y $T \notin I_{BD}(B \to C)$

(δ) $1 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(B)$; gracias a la Hipótesis de inducción se obtiene $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por medio de la cláusula (I) de la Definición 2.13 conseguimos $F \in I_{BD}(B \to C)$ y $T \notin I_{BD}(B \to C)$

(ε) $2 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(B)$; gracias a la Hipótesis de inducción se obtiene $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y por medio de la cláusula (I) de la Definición 2.13 conseguimos $F \in I_{BD}(B \to C)$ y $T \notin I_{BD}(B \to C)$

(ζ) $3 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción se obtiene $F \notin I_{BD}(B)$y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y por medio de la cláusula (I) de la Definición 2.13 conseguimos $F \in I_{BD}(B \to C)$ y $T \notin I_{BD}(B \to C)$

(η) $3 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción se obtiene $F \notin I_{BD}(B)$y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por medio de la cláusula (I) de la Definición 2.13 conseguimos $F \in I_{BD}(B \to C)$ y $T \notin I_{BD}(B \to C)$

De derecha a izquierda:

(α) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; por la Hipótesis de inducción se consigue $1 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (IV).(a) de la Observación 2.14 tenemos $0 \in I_{M4}(B \to C)$

(β) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; por la Hipótesis de inducción se consigue $1 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (IV).(a) de la Observación 2.14 tenemos $0 \in I_{M4}(B \to C)$

(γ) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; por la Hipótesis de inducción se consigue $2 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (IV).(a) de la Observación 2.14 tenemos $0 \in I_{M4}(B \to C)$

(δ) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; por la Hipótesis de inducción se consigue $2 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (IV).(a) de la Observación 2.14 tenemos $0 \in I_{M4}(B \to C)$

(ε) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; por la Hipótesis de inducción se consigue $3 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (IV).(a) de la Observación 2.14 tenemos $0 \in I_{M4}(B \to C)$

(ζ) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; por la Hipótesis de inducción se consigue $3 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (IV).(a) de la Observación 2.14 tenemos $0 \in I_{M4}(B \to C)$

(η) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; por la Hipótesis de inducción se consigue $3 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (IV).(a) de la Observación 2.14 tenemos $0 \in I_{M4}(B \to C)$

(b) $1 \in I_{M4}(A)$ syss $F \notin I_{BD}(A)$ y $T \notin I_{BD}(A)$

(i) A aparece como una conjunción y, por tanto, tiene la forma $B \wedge C$:

De izquierda a derecha:

(α) $1 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite obtener $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y por la cláusula (I) de la Definición 2.11 conseguimos $F \notin I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \notin I_{BD}(B \wedge C)$

(β) $1 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite obtener $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por la cláusula (I) de la Definición 2.11 conseguimos $F \notin I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \notin I_{BD}(B \wedge C)$

(γ) $3 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite obtener $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$ y por la cláusula (I) de la Definición 2.11 conseguimos $F \notin I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \notin I_{BD}(B \wedge C)$

De derecha a izquierda:

(α) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; de acuerdo a la Hipótesis de inducción tenemos $1 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$, y gracias a la cláusula (I).(b) de la Observación 2.14 se obtiene $1 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(β) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; de acuerdo a la Hipótesis de inducción tenemos $1 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$, y gracias a la cláusula (I).(b) de la Observación 2.14 se obtiene $1 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(γ) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; de acuerdo a la Hipótesis de inducción tenemos $3 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$, y gracias a la cláusula (I).(b) de la Observación 2.14 se obtiene $1 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(ii) A aparece como una disyunción y, por tanto, tiene la forma $B \vee C$:

De izquierda a derecha:

(α) $0 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$; por medio de la Hipótesis de inducción se consigue $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y la cláusula (II) de la Definición 2.11 permite obtener $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \notin I_{BD}(B \vee C)$

(β) $1 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$; por medio de la Hipótesis de inducción se consigue $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y la cláusula (II) de la Definición 2.11 permite obtener $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \notin I_{BD}(B \vee C)$

(γ) $1 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$; por medio de la Hipótesis de inducción se consigue $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y la cláusula (II) de la Definición 2.11 permite obtener $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \notin I_{BD}(B \vee C)$

De derecha a izquierda:

(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción se obtiene $0 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$, y según la cláusula (II).(b) de la Observación 2.14 conseguimos $1 \in I_{M4}(B \vee C)$

(β) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción se obtiene $1 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$, y según la cláusula (II).(b) de la Observación 2.14 conseguimos $1 \in I_{M4}(B \vee C)$

(γ) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción se obtiene $1 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$, y según la cláusula (II).(b) de la Observación 2.14 conseguimos $1 \in I_{M4}(B \vee C)$

(iii) A aparece como una negación y, por tanto, tiene la forma $\neg B$:

De izquierda a derecha:

(α) $1 \in I_{M4}(B)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$ y según la cláusula (III) de la Definición 2.11 tenemos $F \notin I_{BD}(\neg B)$ y $T \notin I_{BD}(\neg B)$

De derecha a izquierda:

(α) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$; la Hipótesis de inducción permite conseguir $1 \in I_{M4}(B)$ y por medio de la cláusula (III).(b) de la Observación 2.14 obtenemos $1 \in I_{M4}(\neg B)$

(c) $2 \in I_{M4}(A)$ syss $F \in I_{BD}(A)$ y $T \in I_{BD}(A)$

(i) A aparece como una conjunción y, por tanto, tiene la forma $B \wedge C$:

De izquierda a derecha:
(α) $2 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción tenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por la cláusula (I) de la Definición 2.11 obtenemos $F \in I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \in I_{BD}(B \wedge C)$
(β) $2 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción tenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por la cláusula (I) de la Definición 2.11 obtenemos $F \in I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \in I_{BD}(B \wedge C)$
(γ) $3 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción tenemos $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por la cláusula (I) de la Definición 2.11 obtenemos $F \in I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \in I_{BD}(B \wedge C)$

De derecha a izquierda:
(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; de acuerdo a la Hipótesis de inducción conseguimos $2 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$, y por medio de la cláusula (I).(c) de la Observación 2.14 tenemos $2 \in I_{M4}(B \wedge C)$
(β) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; de acuerdo a la Hipótesis de inducción conseguimos $2 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$, y por medio de la cláusula (I).(c) de la Observación 2.14 tenemos $2 \in I_{M4}(B \wedge C)$
(γ) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; de acuerdo a la Hipótesis de inducción conseguimos $3 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$, y por medio de la cláusula (I).(c) de la Observación 2.14 tenemos $2 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(ii) A aparece como una disyunción y, por tanto, tiene la forma $B \vee C$:

De izquierda a derecha:
(α) $0 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite obtener $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y gracias a la cláusula (II) de la Definición 2.11 se sigue $F \in I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \vee C)$
(β) $2 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite obtener $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y gracias a la cláusula (II) de la Definición 2.11 se sigue $F \in I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \vee C)$
(γ) $2 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite obtener $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y gracias a la cláusula (II) de la Definición 2.11 se sigue $F \in I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \vee C)$

De derecha a izquierda:
(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $0 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (II).(c) de la Observación 2.14 tenemos $2 \in I_{M4}(B \vee C)$
(β) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $2 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (II).(c) de la Observación 2.14 tenemos $2 \in I_{M4}(B \vee C)$

(γ) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $2 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (II).(c) de la Observación 2.14 tenemos $2 \in I_{M4}(B \vee C)$

(iii) A aparece como una negación y, por tanto, tiene la forma $\neg B$:

De izquierda a derecha:
(α) $2 \in I_{M4}(B)$; desde la Hipótesis de inducción conseguimos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$ y por la cláusula (III) de la Definición 2.11 tenemos $F \in I_{BD}(\neg B)$ y $T \in I_{BD}(\neg B)$

De derecha a izquierda tenemos un único caso:
(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$; por la Hipótesis de inducción se tiene $2 \in I_{M4}(B)$ y la cláusula (III).(c) de la Observación 2.14 permite obtener $2 \in I_{M4}(\neg B)$

(iv) A aparece como un condicional y, por tanto, tiene la forma $B \to C$:

De izquierda a derecha:
(α) $2 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción se consigue $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por medio de las cláusulas (I) y (II) de la Definición 2.13 obtenemos $F \in I_{BD}(B \to C)$ y $T \in I_{BD}(B \to C)$

De derecha a izquierda:
(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; por medio de la Hipótesis de inducción se consigue $2 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$, y gracias a la cláusula (IV).(b) de la Observación 2.14 conseguimos $2 \in I_{M4}(B \to C)$

(d) $3 \in I_{M4}(A)$ syss $F \notin I_{BD}(A)$ y $T \in I_{BD}(A)$

(i) A aparece como una conjunción y, por tanto, tiene la forma $B \wedge C$:

De izquierda a derecha:
(α) $3 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$; según la Hipótesis de inducción obtenemos $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y gracias a la cláusula (I) de la Definición 2.11 se tiene $F \notin I_{BD}(B \wedge C)$ y $T \in I_{BD}(B \wedge C)$

De derecha a izquierda tenemos un único caso:
(α) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; por medio de la Hipótesis de inducción se tiene $3 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (I).(d) de la Observación 2.14 conseguimos $3 \in I_{M4}(B \wedge C)$

(ii) A aparece como una disyunción y, por tanto, tiene la forma $B \vee C$:

De izquierda a derecha:

(α) $0 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite conseguir $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por la cláusula (II) de la Definición 2.11 se consigue $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \vee C)$

(β) $1 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite conseguir $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por la cláusula (II) de la Definición 2.11 se consigue $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \vee C)$

(γ) $1 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite conseguir $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por la cláusula (II) de la Definición 2.11 se consigue $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \vee C)$

(δ) $2 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite conseguir $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y por la cláusula (II) de la Definición 2.11 se consigue $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \vee C)$

(ε) $2 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite conseguir $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por la cláusula (II) de la Definición 2.11 se consigue $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \vee C)$

(ζ) $3 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite conseguir $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y por la cláusula (II) de la Definición 2.11 se consigue $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \vee C)$

(η) $3 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite conseguir $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y por la cláusula (II) de la Definición 2.11 se consigue $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \vee C)$

(ϑ) $3 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite conseguir $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por la cláusula (II) de la Definición 2.11 se consigue $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \vee C)$

(ι) $3 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$; la Hipótesis de inducción permite conseguir $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y por la cláusula (II) de la Definición 2.11 se consigue $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \vee C)$

De derecha a izquierda:

(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción obtenemos $0 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$, y la cláusula (II).(d) de la Observación 2.14 permite obtener $3 \in I_{M4}(B \vee C)$

(β) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción obtenemos $1 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$, y la cláusula (II).(d) de la Observación 2.14 permite obtener $3 \in I_{M4}(B \vee C)$

(γ) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción obtenemos $1 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$, y la cláusula (II).(d) de la Observación 2.14 permite obtener $3 \in I_{M4}(B \vee C)$

(δ) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción obtenemos $2 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$, y la cláusula (II).(d) de la Observación 2.14 permite obtener $3 \in I_{M4}(B \vee C)$

(ε) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción obtenemos $2 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$, y la cláusula (II).(d) de la Observación 2.14 permite obtener $3 \in I_{M4}(B \vee C)$

(ζ) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción obtenemos $3 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$, y la cláusula (II).(d) de la Observación 2.14 permite obtener $3 \in I_{M4}(B \vee C)$

(η) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción obtenemos $3 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$, y la cláusula (II).(d) de la Observación 2.14 permite obtener $3 \in I_{M4}(B \vee C)$

(ϑ) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción obtenemos $3 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$, y la cláusula (II).(d) de la Observación 2.14 permite obtener $3 \in I_{M4}(B \vee C)$

(ι) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; gracias a la Hipótesis de inducción obtenemos $3 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$, y la cláusula (II).(d) de la Observación 2.14 permite obtener $3 \in I_{M4}(B \vee C)$

(iii) A aparece como una negación y, por tanto, tiene la forma $\neg B$:

De izquierda a derecha:

(α) $0 \in I_{M4}(B)$; de acuerdo a la Hipótesis de inducción se tiene $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$ y según la cláusula (III) de la Definición 2.11 tenemos $F \notin I_{BD}(\neg B)$ y $T \in I_{BD}(\neg B)$

De derecha a izquierda tenemos un único caso:

(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$; desde la Hipótesis de inducción conseguimos $0 \in I_{M4}(B)$ y por medio de la cláusula (III).(d) de la Observación 2.14 se obtiene $3 \in I_{M4}(\neg B)$

(iv) A aparece como un condicional y, por tanto, tiene la forma $B \to C$:

De izquierda a derecha:

(α) $0 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y gracias a la cláusula (II) de la Definición 2.13 conseguimos $F \notin I_{BD}(B \to C)$ y $T \in I_{BD}(B \to C)$

(β) $0 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y gracias a la cláusula (II) de la Definición 2.13 conseguimos $F \notin I_{BD}(B \to C)$ y $T \in I_{BD}(B \to C)$

(γ) $0 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y gracias a la cláusula (II) de la Definición 2.13 conseguimos $F \notin I_{BD}(B \to C)$ y $T \in I_{BD}(B \to C)$

(δ) $0 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y gracias a la cláusula (II) de la Definición 2.13 conseguimos $F \notin I_{BD}(B \to C)$ y $T \in I_{BD}(B \to C)$

(ε) $1 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$, y gracias a la cláusula (II) de la Definición 2.13 conseguimos $F \notin I_{BD}(B \vee C)$ y $T \in I_{BD}(B \to C)$

(ζ) $1 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y gracias a la cláusula (II) de la Definición 2.13 conseguimos $F \notin I_{BD}(B \to C)$ y $T \in I_{BD}(B \to C)$

(η) $2 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y gracias a la cláusula (II) de la Definición 2.13 conseguimos $F \notin I_{BD}(B \to C)$ y $T \in I_{BD}(B \to C)$

(ϑ) $3 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$, y gracias a la cláusula (II) de la Definición 2.13 conseguimos $F \notin I_{BD}(B \to C)$ y $T \in I_{BD}(B \to C)$

De derecha a izquierda:

(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $0 \in I_{M4}(B)$ y $0 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (II).(c) de la Observación 2.14 obtenemos $3 \in I_{M4}(B \to C)$

(β) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $0 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (II).(c) de la Observación 2.14 obtenemos $3 \in I_{M4}(B \to C)$

(γ) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \in I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $0 \in I_{M4}(B)$ y $2 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (II).(c) de la Observación 2.14 obtenemos $3 \in I_{M4}(B \to C)$

(δ) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $0 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (II).(c) de la Observación 2.14 obtenemos $3 \in I_{M4}(B \to C)$

(ε) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \notin I_{BD}(C)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $1 \in I_{M4}(B)$ y $1 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (II).(c) de la Observación 2.14 obtenemos $3 \in I_{M4}(B \to C)$

(ζ) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $1 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (II).(c) de la Observación 2.14 obtenemos $3 \in I_{M4}(B \to C)$

(η) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $2 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (II).(c) de la Observación 2.14 obtenemos $3 \in I_{M4}(B \to C)$

(ϑ) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$, y $F \notin I_{BD}(C)$ y $T \in I_{BD}(C)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $3 \in I_{M4}(B)$ y $3 \in I_{M4}(C)$, y de acuerdo a la cláusula (II).(c) de la Observación 2.14 obtenemos $3 \in I_{M4}(B \to C)$

■

Definición 2.17 (M4-Interpretación correspondiente a una BD-interpretación):
Sea I_{BD} una BD-interpretación. Entonces definimos una M4-interpretación I_{M4} correspondiente:
Para cada variable proposicional p_i:

(V) $I_{BD}(p_i) = \{F\}$ y $I_{BD}(P_i) \neq \{T\}$ syss $I_{M4}(p_i) = 0$

(VI) $I_{BD}(p_i) = \varnothing$ syss $I_{M4}(p_i) = 1$

(VII) $I_{BD}(p_i) = \{T,\ F\}$ syss $I_{M4}(p_i) = 2$

(VIII) $I_{BD}(p_i) = \{T\}$ y $I_{BD}(P_i) \neq \{F\}$ syss $I_{M4}(p_i) = 3$

Lema 2.18 (Correspondencia de las I_{BD} con respecto a las I_{M4}): Dada la Definición 2.16 extendemos la equivalencia de las variables proposicionales a las fbf:
Para una fbf cualquiera A se cumple:

(I) $I_{BD}(A) = \{F\}$ y $I_{BD}(A) \neq \{T\}$ syss $I_{M4}(A) = 0$
(II) $I_{BD}(A) = \varnothing$ syss $I_{M4}(A) = 1$
(III) $I_{BD}(A) = \{T, F\}$ syss $I_{M4}(A) = 2$
(IV) $I_{BD}(A) = \{T\}$ y $I_{BD}(A) \neq \{F\}$ syss $I_{M4}(A) = 3$

Prueba:
A fin de probar la correspondencia de las interpretaciones hay que demostrar la equivalencia en la valoración de las fbf con respecto a todos los valores de verdad. Para ello procederemos por inducción sobre k, la complejidad de la fórmula.

(I) Para $k = 1$, A es una variable proposicional y se sigue automáticamente por la Definición 2.17

(II) Para $k \leq n$, donde $n \in \mathbb{N}$, asumimos la hipótesis de inducción

(III) Para $k = n + 1$ la prueba transcurre como de manera similar a la del apartado correspondiente del Lema 2.16

■

Teorema 2.19 (Equivalencia de las nociones de validez en M4): La BD-validez, desarrollada en la Definición 2.12, y la M4-validez, incluida en la Definición 1.6, son equivalentes

Prueba:
Suponemos $\vDash_{M4} A$, entonces tendremos que $\vDash_{BD} A$, ya que si sucediese que $\nvDash_{BD} A$, entonces habría una BD-interpretación I_{BD} tal que $I_{BD}(A) \neq T$ y, por el Lema 2.18, $I_{M4}(A) = 0$ ó 1, contradiciendo la hipótesis. En el sentido contrario se procedería de manera parecida, aplicando el Lema 2.16 en sustitución del Lema 2.18. Para el caso de $\Gamma \vDash_{BD} A$ es menester probar $\Gamma \vDash_{M4} A$; para ello sea I_{M4} una M4-interpretación tal que $I_{M4}(\Gamma) = 2$ ó 3 y hemos de probar que $I_{M4}(A) = 2$ ó 3. Definimos la BD-interpretación correspondiente a la I_{M4} que hemos definido con anterioridad, tal y como hicimos en la Definición 2.15. Por el Lema 2.16, para toda fbf A, $I_{M4}(A) = 2$ ó 3 syss $I_{BD}(A) = T$. Dado que tenemos que $I_{M4}(\Gamma) = 2$ ó 3, necesariamente $I_{BD}(\Gamma) = T$ y desde aquí tenemos $I_{BD}(A) = T$, lo que por el Lema 2.18 nos ofrece el resultado $I_{M4}(A) = 2$ ó 3. En el sentido contrario es probado de manera semejante utilizando el Lema 2.16 en sustitución del Lema 2.18 y viceversa cuando proceda.

■

4 Primera axiomatización: FDF4

Para la primera axiomatización de la matriz partiremos del clásico sistema FDE al que añadiremos los axiomas característicos del condicional que estamos tratando y que ha sido definido según las cláusulas de la Definición 2.11 y la Definición 2.13, equivalentes a las cláusulas de la Observación 2.14. También sustituiremos determinadas reglas por sus variantes disyuntivas dado el carácter del Lema de Extensión que probaremos después. Cabe destacar, aunque obvio, que FDF4 es una expansión de FDF+ y una extensión de FDF, ambos sistemas definidos con anterioridad.

A1. $A \to A$
A2. $A \wedge B \to .A$ / $A \wedge B \to .B$
A3. $A \to .A \vee B$ / $B \to .A \vee B$
A4. $A \wedge (B \vee C) \to .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A5. $A \to \neg\neg A$
A6. $\neg\neg A \to A$
A7. $(A \to B) \wedge A \to .B$
A8. $(A \to B) \wedge \neg B \to .\neg A$
A9.$(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$
A10. $\neg A \wedge \neg(A \to B) \to .A$
A11. $B \wedge \neg (A \to B) \to .\neg B$
A12. $\neg (A \to B) \to .A \vee \neg B$
R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \to B\, y\, A \Rightarrow B$
R3. $D \vee (A \to B)\ y\ D \vee (B \to C) \Rightarrow D \vee (A \to C)$
R4. $D \vee (A \to B)\ y\ D \vee (A \to C) \Rightarrow D \vee (A \to (B \wedge C))$
R5. $D \vee (A \to C)\ y\ D \vee (B \to C) \Rightarrow D \vee ((A \vee B) \to C)$
R6. $C \vee (A \to B) \Rightarrow C \vee (\neg B \to \neg A)$
R7. $C \vee A\, y\, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \to B)$

En caso de necesitar las reglas habituales, demostramos que estas se pueden obtener fácilmente gracias a su versión disyuntiva.

Proposición 2.20 (Reglas habituales y reglas disyuntivas): Las reglas habituales son derivables de las reglas disyuntivas en FDF4

Prueba:

(I) $A \to B\ y\ B \to C \Rightarrow A \to C$ es derivable a través de R3 en FDF4, $D \vee (A \to B)\ y\ D \vee (B \to C) \Rightarrow D \vee (A \to C)$

1. $A \to B$	Hipótesis
2. $B \to C$	Hipótesis
3. $A \to B \to .(A \to C) \vee (A \to B)$	A3
4. $(A \to C) \vee (A \to B)$	R2, 1, 3
5. $B \to C \to .(A \to C) \vee (B \to C)$	A3

6. $(A \to C) \vee (B \to C)$	R2, 2, 5
7. $(A \to C) \vee (A \to C)$	R3, 4, 6
8. $(A \to C) \vee (A \to C) \to .A \to C$	Idempotencia de la Disyunción
9. $A \to C$	R2, 7, 8

(II) $A \to B \, y \, A \to C \Rightarrow A \to .B \wedge C$ es derivable a través de R4 en FDF4, $D \vee (A \to B) \; y \; D \vee (A \to C) \Rightarrow D \vee (A \to (B \wedge C))$

1. $A \to B$	Hipótesis
2. $A \to C$	Hipótesis
3. $A \to B \to .(A \to (B \wedge C)) \vee (A \to B)$	A3
4. $(A \to (B \wedge C)) \vee (A \to B)$	R2, 1, 3
5. $A \to C \to .(A \to (B \wedge C)) \vee (A \to C)$	A3
6. $(A \to (B \wedge C)) \vee (A \to C)$	R2, 2, 5
7. $(A \to (B \wedge C)) \vee (A \to (B \wedge C))$	R4, 4, 6
8. $(A \to (B \wedge C)) \vee (A \to (B \wedge C)) \to .(A \to (B \wedge C))$	Idempotencia de la Disyunción
9. $A \to .B \wedge C$	R2, 7, 8

(III) $A \to C \, y \, B \to C \Rightarrow A \vee B \to .C$ es derivable a través de R5 en FDF4, $D \vee (A \to C) \; y \; D \vee (B \to C) \Rightarrow D \vee ((A \vee B) \to C)$

1. $A \to B$	Hipótesis
2. $B \to C$	Hipótesis
3. $A \to B \to .((A \vee B) \to C) \vee (A \to C)$	A3
4. $((A \vee B) \to C) \vee (A \to C)$	R2, 1, 3
5. $B \to C \to .((A \vee B) \to C) \vee (B \to C)$	A3
6. $((A \vee B) \to C) \vee (B \to C)$	R2, 2, 5
7. $((A \vee B) \to C) \vee ((A \vee B) \to C)$	R5, 4, 6
8. $((A \vee B) \to C) \vee ((A \vee B) \to C) \to .((A \vee B) \to C)$	Idempotencia de la Disyunción
9. $A \vee B \to .C$	R2, 7, 8

(IV) $A \to B \Rightarrow \neg B \to \neg A$ es derivable a través de R6 en FDF4, $C \vee (A \to B) \Rightarrow C \vee (\neg B \to \neg A)$

1. $A \to B$	Hipótesis
2. $A \to B \to .(\neg B \to \neg A) \vee (A \to B)$	A3
3. $(\neg B \to \neg A) \vee (A \to B)$	R2, 1, 2
4. $(\neg B \to \neg A) \vee (\neg B \to \neg A)$	R6, 3
5. $(\neg B \to \neg A) \vee (\neg B \to \neg A) \to .\neg B \to \neg A$	Idempotencia de la Disyunción
6. $\neg B \to \neg A$	R2, 4, 5

(V) $A \, y \, \neg B \Rightarrow \neg (A \to B)$ es derivable a través de R7 en FDF4, $C \vee A \, y \, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \to B)$

1. A	Hipótesis
2. $\neg B$	Hipótesis

3. $A \to .\neg(A \to B) \vee A$	A3
4. $\neg(A \to B) \vee A$	R2, 1, 3
5. $\neg B \to .\neg(A \to B) \vee \neg B$	A3
6. $\neg(A \to B) \vee \neg B$	R2, 2, 5
7. $\neg(A \to B) \vee \neg(A \to B)$	R7, 4, 6
8. $\neg(A \to B) \vee \neg(A \to B) \to .\neg(A \to B)$	Idempotencia de la Disyunción
9. $\neg(A \to B)$	R2, 7, 8

■

4.1 Sobre la independencia de los axiomas de FDF4

La independencia de los axiomas es una tarea que, aunque no resulta vital para el desarrollo de un sistema interesante, si resulta apropiada en aras de la elegancia y la sencillez. Para esta tarea, probar la independencia de los axiomas, utilizaremos la aplicación informática denominada como *MaGIC* (*Matrix Generator for Implicative Connectives*), desarrollada por J. Slaney [Slaney, 1995]. Gracias a este programa podemos determinar si los axiomas son independientes o no; para ello incluiremos en dicho programa a modo de axiomas del sistema todas las tesis a excepción de aquella de la que queramos comprobar su independencia,. Esta será introducida como *Bad Guy*, es decir, una tesis que ha de ser falsada de cara a la generación de matrices que proporciona el programa. Así, si el programa genera al menos una matriz, tendremos una interpretación que hará verdaderos a los axiomas y falsará el *Bad Guy*, con lo cual habremos probado su independencia. En caso contrario, si no se generase ninguna matriz, podremos establecer que, dentro de los límites del programa, no existiría ninguna interpretación. Asumiendo que los límites del programa son lo suficientemente amplios, habríamos obtenido una prueba fehaciente de que el axioma no es independiente. De esta manera, el único axioma que no es independiente en FDF4 sería A9.

En caso de duda, la comprobación de los axiomas por parte del lector debería resultar sencilla, dada la disponibilidad del programa a día de hoy.

4.2 Sobre la elección de FDE y las reglas disyuntivas

Pueda llegar a resultar extraña la elección de FDE como sistema base para la axiomatización por ser, precisamente, un sistema cargado, quizás en exceso, de reglas, y más cuando todas las reglas de este sistema tienen su equivalente axiomático incluido en la matriz M4. Sin embargo, si hay algo que hace que FDE sea un sistema de valor incalculable es precisamente el hecho de tratarse de un sistema muy débil. Esto nos proporciona una gran base para poder exportar los resultados de manera posterior a sistemas más fuertes y que, quizá, puedan resultar de mayor atractivo a la hora de desarrollar el contenido de la matriz. A pesar de todo, y como ya se ha señalado un poco más arriba, FDE es un sistema extremadamente débil. Por esta misma razón es por la que se ha incluido en la axiomatización Modus Ponens y Modus Tollens en su forma axiomática, A7 y A8 respectivamente. De manera adicional se han incluido los axiomas característicos del condicional definido por la matriz.

Otro punto muy importante y que, sin duda, resulta llamativo y que puede ser fuente de duras críticas es la sustitución de algunas de las reglas convencionales de FDE por sus contrapartidas disyuntivas. Sin embargo la utilidad de estas quedará absolutamente probada en el momento en el que se desarrolle más adelante el Lema de Extensión, tal y como se había apuntado antes. Y es que este Lema de Extensión previsto permite, al igual que la elección de FDE, tener una herramienta de una potencia envidiable a la hora de extender los resultados a otras lógicas que quizá sean más interesantes, tanto desde el punto de vista formal como desde el punto de vista filosófico.

4.3 Sintaxis del sistema FDF4

A continuación daremos uso a los teoremas que hemos probado en la sección sintáctica de FDF+ y FDF para probar nuevas cuestiones:

4.3.1 Teoremas sintácticos

Modus Ponens en su versión disyuntiva: $(C \vee (A \rightarrow B)) \wedge (C \vee A) \rightarrow \mathbf{.} C \vee B$

1. $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow \mathbf{.} B$	A7
2. $C \vee ((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow \mathbf{.} C \vee B$	Sumación, 1
3. $(C \vee (A \rightarrow B)) \wedge (C \vee A) \rightarrow \mathbf{.} C \vee B$	Distribución (IV), 2

4.3.2 Tesis y la axiomatización de FDF4

Para concluir la presentación del sistema probaremos que las tesis características de la matriz se encuentran incluidas dentro de la axiomatización que hemos dado más arriba

Teorema 2.21 (Tesis y la axiomatización de FDF4): Las tesis características de la matriz M4 son recogidas por la axiomatización de FDF4

Prueba:

Sean las siguientes tesis las características de las conectivas de la matriz M4, para fbf A y B:

TC1. $A \wedge B \rightarrow \mathbf{.} A$
TC2. $A \wedge B \rightarrow \mathbf{.} B$
TC3. $\neg (A \wedge B) \rightarrow \mathbf{.} \neg A \vee \neg B$
TD1. $A \rightarrow \mathbf{.} A \vee B$
TD2. $B \rightarrow \mathbf{.} A \vee B$
TD3. $\neg (A \vee B) \rightarrow \neg A$
TD4. $\neg (A \vee B) \rightarrow \neg B$
TD5. $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \mathbf{.} \neg (A \vee B)$
TN1. $\neg A \rightarrow \neg A$

TN2. $\neg\neg A \to A$
TN3. $A \to \neg\neg A$
TE1.$(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$
TE2. $\neg A \to .A \vee (A \to B)$
TE3. $B \to .\neg B \vee (A \to B)$
TE4. $\neg A \wedge B \to .A \to B$
TE5. $\neg (A \to B) \wedge \neg A \to .A$
TE6. $(\neg (A \to B) \wedge \neg A) \wedge B \to .A$
TE7. $\neg (A \to B) \to .\neg B \vee A$
TE8. $\neg (A \to B) \wedge B \to .\neg B$
TE9. $\neg B \to .\neg A \vee \neg (A \to B)$
TE10. $A \to .B \vee \neg (A \to B)$
RE1. $A\, y\, \neg B \Rightarrow \neg (A \to B)$

El siguiente paso consiste en probar que dichos teoremas y regla se pueden derivar de la axiomatización que hemos dado:

TC1:

1. $A \wedge B \to .A$	A2

TC2:

1. $A \wedge B \to .B$	A2

TC3:

1. $\neg (A \wedge B) \to .\neg A \vee \neg B$	De Morgan (V)

TD1:

1. $A \to .A \vee B$	A3

TD2:

1. $B \to .A \vee B$	A3

TD3:

1. $A \to .A \vee B$	A3
2. $\neg (A \vee B) \to \neg A$	R6, 1

TD4:

1. $B \to .A \vee B$	A3
2. $\neg (A \vee B) \to \neg B$	R6, 1

TD5:

1. $\neg A \wedge \neg B \rightarrow .\neg (A \vee B)$	De Morgan (III)

TN1:

1. $\neg A \rightarrow \neg A$	A1

TN2:

1. $\neg\neg A \rightarrow A$	A6

TN3:

1. $A \rightarrow \neg\neg A$	A5

TE1:

1. $(A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)$	A9

TE2:

1. $\neg A \wedge \neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A$	A10
2. $\neg A \rightarrow .\neg (\neg A \wedge \neg (A \rightarrow B))$	R6, 1
3. $\neg A \rightarrow .\neg\neg A \vee \neg\neg (A \rightarrow B)$	De Morgan (V), 2
4. $\neg A \rightarrow .A \vee (A \rightarrow B)$	A6, 3

TE3:

1. $B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow .\neg B$	A11
2. $\neg\neg B \rightarrow .\neg (B \wedge \neg (A \rightarrow B))$	R6, 1
3. $\neg\neg B \rightarrow .\neg B \vee \neg\neg (A \rightarrow B)$	De Morgan (V), 2
4. $B \rightarrow .\neg B \vee (A \rightarrow B)$	A5, A6, 3

TE4:

1. $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B$	A12
2. $\neg (A \vee \neg B) \rightarrow .\neg\neg (A \rightarrow B)$	R6, 1
3. $\neg A \wedge \neg\neg B \rightarrow .\neg\neg (A \rightarrow B)$	De Morgan (I), 2
4. $\neg A \wedge B \rightarrow .A \rightarrow B$	A5, A6, 3

TE5:

1. $\neg A \wedge \neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A$	A10

TE6:

1. $\neg A \wedge \neg(A \to B) \to .A$	A10
2. $(\neg A \wedge \neg(A \to B)) \wedge B \to .\neg A \wedge \neg(A \to B)$	A2
3. $(\neg A \wedge \neg(A \to B)) \wedge B \to .A$	R3, 1, 2

TE7:

1. $\neg(A \to B) \to .\neg B \vee A$	A12

TE8:

1. $\neg(A \to B) \wedge B \to .\neg B$	A11

TE9:

1. $A \wedge (A \to B) \to .B$	A7
2. $\neg B \to .\neg(A \wedge (A \to B))$	R6, 1
3. $\neg B \to .\neg A \vee \neg(A \to B)$	De Morgan (V), 2

TE10:

1. $\neg B \wedge (A \to B) \to .\neg A$	A8
2. $\neg\neg A \to .\neg(\neg B \wedge (A \to B))$	R6, 1
3. $A \to .\neg(\neg B \wedge (A \to B))$	A5, 2
4. $A \to .\neg\neg B \vee \neg(A \to B)$	De Morgan (V), 3
5. $A \to .B \vee \neg(A \to B)$	A6, 4

RE1:

1. A	Hipótesis
2. $\neg B$	Hipótesis
3. $\neg(A \to B)$	R7, 1, 2

■

5 Prueba de corrección de FDF4

A continuación ofreceremos una prueba de corrección fuerte para FDF4 con respecto a la M4-semántica, y dado que hemos probado su equivalencia, también con respecto a la BD-semántica:

Teorema 2.22 (Corrección fuerte para FDF4): Para un conjunto de fbf cualesquiera Γ, y una fbf cualquiera A, si $\Gamma \vdash_{FDF4} A$, entonces $\Gamma \vDash_{M4} A$ y, en consecuencia, $\Gamma \vDash_{BD} A$

Prueba:

La prueba procede por inducción sobre k, la longitud de la derivación de $\Gamma \vdash_{FDF4} A$

(I) Para $k = 1$, A es una de las fbf de Γ y, por tanto, $A \in \Gamma$ y la prueba es trivial. A su vez A puede ser un axioma y hemos de probar que este es válido. Para ello habríamos de probar cada uno de los axiomas, pero dada la inmensa longitud de la prueba, daremos únicamente un ejemplo y el resto, en caso de despertar interés, quedará para el lector[1]. Para fbf A y B cualesquiera:

A12. $\neg(A \to B) \to .A \vee \neg B$:

Para $I_{M4}(A) = 0$ y $I_{M4}(B) = 0$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \to B)) = 0$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 3$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \to B) \to .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \to B) \to .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 1$ y $I_{M4}(B) = 0$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \to B)) = 3$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 3$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \to B) \to .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \to B) \to .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 2$ y $I_{M4}(B) = 0$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \to B)) = 3$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 3$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \to B) \to .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \to B) \to .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 3$ y $I_{M4}(B) = 0$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \to B)) = 3$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 3$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \to B) \to .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \to B) \to .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 0$ y $I_{M4}(B) = 1$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \to B)) = 0$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 3$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \to B) \to .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \to B) \to .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 1$ y $I_{M4}(B) = 1$

[1] En caso de necesitar una herramienta para facilitar la comprobación puede recurrirse al comprobador de matrices (*tester*) [González, 2012]

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B)) = 0$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 1$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 2$ y $I_{M4}(B) = 1$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B)) = 3$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 3$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 3$ y $I_{M4}(B) = 1$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B)) = 3$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 3$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 0$ y $I_{M4}(B) = 2$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B)) = 0$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 2$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 1$ y $I_{M4}(B) = 2$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B)) = 3$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 3$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 2$ y $I_{M4}(B) = 2$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B)) = 2$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 2$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = 2$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 3$ y $I_{M4}(B) = 2$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B)) = 3$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 3$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 0$ y $I_{M4}(B) = 3$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B)) = 0$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 0$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 1$ y $I_{M4}(B) = 3$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B)) = 0$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 0$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 2$ y $I_{M4}(B) = 3$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B)) = 0$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 2$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{M4}(A) = 3$ y $I_{M4}(B) = 3$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, podemos concluir que $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B)) = 0$ y $I_{M4}(A \vee \neg B) = 3$, lo que, de nuevo, por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, nos ofrece el resultado $I_{M4}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, podemos concluir que $I_{BD}(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B) = T$, verificando así el axioma.

(II) Para $k = n$, donde $n \in \mathbb{N}$, asumimos la hipótesis de inducción

(III) Para $k = n + 1$:

A puede, o bien ser un axioma, o bien haber sido derivada mediante una de las reglas del sistema. Para el caso en que A sea un axioma, nos remitimos a (I). Por tanto, probaremos el caso en el que A es derivada a través de una regla; para este caso basta con mostrar que no existe un interpretación que otorgue un valor designado a la premisa de la regla y un valor no designado a la conclusión. Por tanto, reducimos su extensión a los casos en los que la premisa obtiene un valor designado. De nuevo, dado que la longitud de la prueba completa es de gran tamaño, daremos un único ejemplo y el resto quedarán para el lector. Para fbf A y B cualesquiera:

R7. $(A \rightarrow B)$ y $A \Rightarrow B$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, se puede concluir que $I_{M4}(A \rightarrow B) = 2$, $I_{M4}(A) = 2$ y $I_{M4}(B) = 2$, lo que, por la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, se puede concluir que $I_{BD}(A \rightarrow B) = T$, $I_{BD}(A) = T$ y $I_{BD}(B) = T$, dando por verificada la regla.

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, se puede concluir que $I_{M4}(A \rightarrow B) = 3$, $I_{M4}(A) = 2$ y $I_{M4}(B) = 3$, lo que, por la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 2.19, se puede concluir que $I_{BD}(A \rightarrow B) = T$, $I_{BD}(A) = T$ y $I_{BD}(B) = T$, dando por verificada la regla.

Para $I_{M4}(A) = 3$ y $I_{M4}(B) = 3$

Por la Definición 1.5 y la Observación 2.14, se puede concluir que $I_{M4}(A \rightarrow B) = 3$, $I_{M4}(A) = 3$ y $I_{M4}(B) = 3$, lo que, por la equivalencia de los conceptos de

validez expresada en el Teorema 2.19, se puede concluir que $I_{BD}(A \to B) = T$, $I_{BD}(A) = T$ y $I_{BD}(B) = T$, dando por verificada la regla.
■

6 Los Modelos Canónicos

Definición 2.23 (EFDF4-teorías): Una EFDF4-teoría a, es un conjunto de fbf cerrado por EFDF4-implicación, Adjunción y Contraejemplo Disyuntivo; i. e: a es una EFDF4-teoría syss para cualesquiera fbf A, B y C:
(I) Si $A \to B$ es teorema de EFDF4 y $A \in a$, entonces $B \in a$
(II) Si $A \in a$ y $B \in a$ entonces $A \wedge B \in a$
(III) Si $C \vee A \in a$ y $C \vee \neg B \in a$ entonces $C \vee \neg(A \to B) \in a$

Definición 2.24 (Clases de teorías): Sea a una EFDF4-teoría. Establecemos que:
(I) a es prima syss se cumple que si $A \vee B \in a$ entonces $A \in a$ ó $B \in a$
(II) a es normal syss si A es teorema de EFDF4, entonces $A \in a$; i. e: a contiene todos los teoremas de EFDF4
(III) a es a-consistente syss a es no trivial; i. e: a no contiene todas las fbf.

Proposición 2.25 (Cierre por Modus Ponens y Modus Tollens): Sea a una EFDF4-teoría. Entonces a se encuentra cerrada por Modus Ponens y Modus Tollens; i. e: para fbf A y B, si $A \to B \in a$ y $A \in a$, entonces $B \in a$; y si $A \to B \in a$ y $\neg B \in a$, entonces $\neg A \in a$, respectivamente.

Prueba:
Es inmediata dado que las teorías están cerradas por EFDF4-implicación, y el sistema posee las tesis de Modus Ponens y Modus Tollens, A7 y A8 respectivamente.

Lema 2.26 (EFDF4-Teorías y doble negación):
Sea a una EFDF4-teoría. Entonces, para una fbf cualquiera A, se cumple que $A \in a$ syss $\neg\neg A \in a$.

Prueba:
Resulta inmediata por los axiomas A5 y A6 de EFDF4

Lema 2.27 (Conjunción y Disyunción en EFDF4-teorías primas): Sea a una EFDF4-teoría y fbf A y B tales que $A \in a$ y $B \in a$. Entonces se cumple que:
(I).(a) $A \wedge B \in a$ syss $A \in a$ y $B \in a$
(I).(b) $\neg(A \wedge B) \in a$ syss $\neg A \in a$ ó $\neg B \in a$
(II).(a) $A \vee B \in a$ syss $A \in a$ ó $B \in a$

(II).(b) $\neg(A \vee B) \in a$ syss $\neg A \in a$ y $\neg B \in a$

Prueba:
(I).(a) queda probado por el hecho de que a está cerrada por Adjunción y A2. (I).(b) se prueba por De Morgan (V) y la primacía de a. (II).(a) Se debe al hecho de que a es prima y A3. Por último (II).(b) es probado por De Morgan (I) y el hecho de que a esté cerrada por Adjunción.

Lema 2.28 (Implicación en EFDF4-teorías primas normales): Sea a una EFDF4-teoría prima y normal y fbf A y B tales que $A \in a$ y $B \in a$. Entonces se cumple que:

(I) $A \to B \in a$ syss ($A \notin a$ ó $B \in a$) y ($\neg A \in a$ ó $\neg B \notin a$)

(II) $\neg(A \to B) \in a$ syss ($A \in a$ y $\neg B \in a$) ó ($\neg A \notin a$ y $\neg B \in a$) ó ($A \in a$ y $B \notin a$)

Prueba:
(I) Hemos de probar en los dos sentidos de la primera cláusula:

(i) De izquierda a derecha: Suponemos $A \to B \in a$ y, por Reductio Ad Absurdum, tenemos (α) $A \in a$ y $B \notin a$ ó (β) $\neg A \notin a$ y $\neg B \in a$, pero ambas llevan a contradicción ya que a se encuentra cerrada por Modus Ponens y Modus Tollens tal y como probamos en la Proposición 2.25

(ii) De derecha a izquierda: Tenemos cuatro casos distintos:

(α) $A \notin a$ y $\neg A \in a$; por el teorema de EFDF4 TE2, $\neg A \to .A \vee (A \to B)$, más el hecho de que a está cerrada por EFDF4-implicación y es prima, podemos obtener el resultado $A \to B \in a$ tal y como queríamos.

(β) $A \notin a$ y $\neg B \notin a$; gracias a A9, $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$ y que a es prima y normal, obtenemos $A \to B \in a$.

(γ) $B \in a$ y $\neg A \in a$; se resuelve de manera similar al caso α.

(δ) $B \in a$ y $\neg B \notin a$; a través del teorema TE3, $B \to \neg B \vee (A \to B)$, y dado que a está cerrada por por EFDF4-implicación y es prima, se obtiene fácilmente el resultado pretendido, $A \to B \in a$

(II) Para la segunda parte, de nuevo, hemos de probar en los dos sentidos:

(i) De izquierda a derecha: Suponemos $\neg(A \to B) \in a$ y, procediendo de nuevo por Reductio, tenemos:

(α) $A \notin a$ y $\neg A \in a$; queda falsado por A10, $\neg A \wedge \neg(A \to B) \to .A$, y el hecho de que a se encuentre cerrada por EFDF4-implicación.

(β) $A \notin a$, $\neg A \in a$ y $B \in a$; es resuelto igual que el caso anterior.

(γ) $A \notin a$ y $\neg B \notin a$; A12, $\neg(A \to B) \to .A \vee \neg B$, junto con el hecho de que a se encuentra cerrada por EFDF4-implicación, sirve para falsar este caso.

(δ) $A \notin a$, $\neg B \notin a$ y $B \in a$; gracias a A11, $\neg(A \to B) \wedge B \to .\neg B$, y que a se encuentra cerrada por EFDF4-implicación, se genera una contradicción.

(ε) $\neg B \notin a$, $\neg A \in a$ y $A \notin a$; se de forma semejante a los dos primeros casos.

(ζ) $\neg B \notin a$, $\neg A \in a$ y $B \in a$; el caso (δ) ofrece una descripción exacta acerca de como resolver este.

(η) $\neg B \notin a$ y $A \notin a$; de nuevo, se hace uso de A12, $\neg (A \to B) \to .A \vee \neg B$, tal y como se hizo en el caso (γ)

(θ) $\neg B \notin a$ y $B \in a$; los casos cuarto y sexto han sido resueltos de manera idéntica a este.

(ii) De derecha a izquierda: Tenemos tres casos diferentes:

(α) $A \in a$ y $\neg B \in a$; dado que a se encuentra cerrada por la regla de Contraejemplo, obtenemos de manera automática $\neg (A \to B) \in a$, tal y como necesitábamos.

(β) $\neg A \notin a$ y $\neg B \in a$; por el teorema TE9, $\neg B \to .\neg A \vee \neg (A \to B)$, más el cierre de a por EFDF4-implicación y el hecho de ser prima, conseguimos $\neg (A \to B) \in a$.

(γ) $A \in a$ y $B \notin a$; usando el teorema TE10, $A \to .B \vee \neg (A \to B)$, más el hecho de que a es prima y se encuentra cerrada por EFDF4-implicación, conseguimos el resultado necesario.

■

Definición 2.29 (τ-interpretación): Sea K^{4c} un conjunto equivalente a K^4_{BD}, conjunto de la Definición 2.11. Entonces, una τ-interpretación es una función de $\mathfrak{F}$ en K^{4c} definida como sigue, donde p_i es una variable proposicional cualquiera y τ una EFDF4-teoría prima y normal:

(I) $F \in I_\tau (p_i)$ syss $\neg p_i \in \tau$

(II) $T \in I_\tau (p_i)$ syss $p_i \in \tau$

De manera adicional, para cualquier $A \in \mathfrak{F}$ una τ-interpretación asigna un elemento de K^{4c}de acuerdo a las cláusulas (I)-(III) de la Definición 2.11 y las cláusulas (I)-(II) de la Definición 2.13

Definición 2.30 (Modelo Canónico para la BD-semántica): Un modelo canónico basado en la BD-semántica es una estructura del tipo $\left(K^{4c}, I^c_\tau\right)$, donde K^{4c} es el conjunto que hemos introducido en la Definición 2.29 y I^c_τ es una τ-interpretación.

Definición 2.31 (La relación canónica $\vDash_\tau$): La relación canónica $\vDash_\tau$ se define para cualquier conjunto de fbf Γ y fbf A, $\Gamma \models_\tau A$ syss $T \in I_\tau (A)$, siempre que $T \in I_\tau (\Gamma)$. En particular, $\vDash_\tau A$, A es válida en un modelo canónico, syss $T \in I_\tau (A)$

Teorema 2.32 (El modelo canónico es un BD-modelo): El modelo canónico introducido en la Definición 2.29 es un BD-modelo

Prueba:

Resulta evidente por las Definiciones 2.11 y 2.30. El modelo canónico es una instancia particular de una estructura general como son los BD-modelos.

■

6.1 Extensión de las cláusulas para las variables proposicionales en las τ-interpretaciones a las fbf

Teorema 2.33 (Extensión de las cláusulas a las fbf en las τ-interpretaciones):
Sea τ el conjunto una EFDF4-teoría prima y normal tal y como en la Definición 2.29. Entonces, para toda fbf A:
(I) $F \in I_\tau(A)$ syss $\neg A \in \tau$
(II) $T \in I_\tau(A)$ syss $A \in \tau$

Prueba:
La prueba se desarrolla por inducción sobre k, la longitud de la fórmula. Sean B y C fbf cualesquiera:

(I) Para $k = 1$; A es una variable proposicional y es probado de manera automática por la Definición 2.29

(II) Para $k \leq n$; donde $n \in \mathbb{N}$, asumimos la hipótesis de inducción.

(III) Para $k = n + 1$; existen cuatro subcasos:

(a) A es del tipo $B \wedge C$:

De izquierda a derecha:
(i) $F \in I_\tau(B \wedge C)$; por la Definición 2.11, cláusula (I).(a), se sigue que $F \in I_\tau(B)$ ó $F \in I_\tau(C)$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $\neg B \in \tau$ ó $\neg C \in \tau$. En último lugar, por el Lema 2.27, cláusula (I).(b), podemos concluir $\neg(B \wedge C) \in \tau$
(ii) $T \in I_\tau(B \wedge C)$; por la Definición 2.11, cláusula (I).(b), se sigue que $T \in I_\tau(B)$ y $T \in I_\tau(C)$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $B \in \tau$ y $C \in \tau$. En último lugar, por el Lema 2.27, cláusula (I).(a), podemos concluir $B \wedge C \in \tau$

De derecha a izquierda:
(iii) $\neg(B \wedge C) \in \tau$; por el Lema 2.27, cláusula (I).(b), se sigue que $\neg B \vee \neg C \in \tau$, posteriormente, dado que τ también es una teoría prima tenemos que $\neg B \in \tau$ ó $\neg C \in \tau$ y, adicionalmente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $F \in I_\tau(B)$ ó $F \in I_\tau(C)$. En último lugar, por la Definición 2.11, cláusula (I).(a) tenemos $F \in I_\tau(B \wedge C)$
(iv) $B \wedge C \in \tau$; por el Lema 2.27, cláusula (I).(a), se sigue que $B \in \tau$ y $C \in \tau$. Por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $T \in I_\tau(B)$ y $T \in I_\tau(C)$. En último lugar, por la Definición 2.11, cláusula (I).(b) tenemos $T \in I_\tau(B \wedge C)$

(b) A es del tipo $B \vee C$:

De izquierda a derecha:

(i) $F \in I_\tau(B \vee C)$; por la Definición 2.11, cláusula (II).(a), se sigue que $F \in I_\tau(B)$ y $F \in I_\tau(C)$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $\neg B \in \tau$ y $\neg C \in \tau$. En último lugar, por el Lema 2.27, cláusula (II).(b), podemos concluir $\neg(B \vee C) \in \tau$

(ii) $T \in I_\tau(B \vee C)$; por la Definición 2.11, cláusula (II).(b), se sigue que $T \in I_\tau(B)$ ó $T \in I_\tau(C)$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $B \in \tau$ ó $C \in \tau$. . En último lugar, por el Lema 2.27, cláusula (II).(a), podemos concluir $B \vee C \in \tau$

De derecha a izquierda:

(iii) $\neg(B \vee C) \in \tau$; por el Lema 2.27, cláusula (II).(b), se sigue que $\neg B \in \tau$ y $\neg C \in \tau$ y, adicionalmente ,por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $F \in I_\tau(B)$ y $F \in I_\tau(C)$. En último lugar, por la Definición 2.11, cláusula (II).(a) tenemos $F \in I_\tau(B \vee C)$

(iv) $B \vee C \in \tau$; por el Lema 2.27, cláusula (II).(a), se sigue que $B \in \tau$ ó $C \in \tau$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $T \in I_\tau(B)$ ó $T \in I_\tau(C)$. En último lugar, por la Definición 2.11, cláusula (II).(b) tenemos $T \in I_\tau(B \vee C)$

(c) A es del tipo $\neg B$:

De izquierda a derecha:

(i) $F \in I_\tau(\neg B)$; por la Definición 2.11, cláusula (III).(a), se sigue que $T \in I_\tau(B)$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $B \in \tau$. En último lugar, por el Lema 2.26, podemos concluir $\neg\neg B \in \tau$

(ii) $T \in I_\tau(\neg B)$; por la Definición 2.11, cláusula (III).(b), se sigue que $F \in I_\tau(B)$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $\neg B \in \tau$

De derecha a izquierda:

(iii) $\neg\neg B \in \tau$; por el Lema 2.26, se sigue que $B \in \tau$ y, adicionalmente ,por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $T \in I_\tau(B)$. En último lugar, por la Definición 2.11, cláusula (III).(a) tenemos $F \in I_\tau(\neg\neg B)$

(iv) $\neg B \in \tau$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $F \in I_\tau(B)$. En último lugar, por la Definición 2.11, cláusula (III).(b) tenemos $T \in I_\tau(\neg B)$

(d) A es del tipo $B \to C$:

De izquierda a derecha:

(i) $F \in I_\tau(B \to C)$; por la Definición 2.13, cláusula (I), tenemos tres posibilidades distintas:

(α) $T \in I_\tau(B)$ y $F \in I_\tau(C)$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $B \in \tau$ y $\neg C \in \tau$. Adicionalmente, por el Lema 2.28, cláusula (II), podemos concluir $\neg(B \to C) \in \tau$

(β) $F \notin I_\tau(B)$ y $F \in I_\tau(C)$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $\neg B \notin \tau$ y $\neg C \in \tau$. Adicionalmente, por el Lema 2.28, cláusula (II), podemos concluir $\neg(B \to C) \in \tau$

(γ) $T \in I_\tau(B)$ y $T \notin I_\tau(C)$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $B \in \tau$ y $C \notin \tau$. Adicionalmente, por el Lema 2.28, cláusula (II), podemos concluir $\neg(B \to C) \in \tau$

(ii) $T \in I_\tau(B \to C)$; por la Definición 2.13, cláusula (II), tenemos cuatro posibilidades distintas:

(α) $T \notin I_\tau(B)$ y $F \notin I_\tau(C)$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $B \notin \tau$ y $\neg C \notin \tau$. Adicionalmente, por el Lema 2.28, cláusula (I), podemos concluir $B \to C \in \tau$

(β) $T \notin I_\tau(B)$ y $F \in I_\tau(B)$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $B \notin \tau$ y $\neg B \in \tau$. Adicionalmente, por el Lema 2.28, cláusula (I), podemos concluir $B \to C \in \tau$

(γ) $T \in I_\tau(C)$ y $F \notin I_\tau(C)$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $C \in \tau$ y $\neg C \notin \tau$. Adicionalmente, por el Lema 2.28, cláusula (I), podemos concluir $B \to C \in \tau$

(δ) $T \in I_\tau(C)$ y $F \in I_\tau(B)$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $C \in \tau$ y $\neg B \in \tau$. Adicionalmente, por el Lema 2.28, cláusula (I), podemos concluir $B \to C \in \tau$

De derecha a izquierda:

(iii) $\neg(B \to C) \in \tau$; por el Lema 2.28, cláusula (II), tenemos tres posibilidades distintas:

(α) $B \in \tau$ y $\neg C \in \tau$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $T \in I_\tau(B)$ y $F \in I_\tau(C)$. Adicionalmente, por la Definición 2.13, cláusula (I), podemos concluir $F \in I_\tau(B \to C)$

(β) $\neg B \notin \tau$ y $\neg C \in \tau$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $F \notin I_\tau(B)$ y $F \in I_\tau(C)$. Adicionalmente, por la Definición 2.13, cláusula (I), podemos concluir $F \in I_\tau(B \to C)$

(γ) $B \in \tau$ y $C \notin \tau$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $T \in I_\tau(B)$ y $T \notin I_\tau(C)$. Adicionalmente, por la Definición 2.13, cláusula (I), podemos concluir $F \in I_\tau(B \to C)$

(iv) $B \to C \in \tau$; por el Lema 2.28, cláusula (I), tenemos tres posibilidades distintas:

(α) $B \notin \tau$ y $\neg C \notin \tau$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $T \notin I_\tau(B)$ y $F \notin I_\tau(C)$. Adicionalmente, por la Definición 2.13, cláusula (II), podemos concluir $T \in I_\tau(B \to C)$

(β) $B \notin \tau$ y $\neg B \in \tau$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $T \notin I_\tau(B)$ y $F \in I_\tau(B)$. Adicionalmente, por la Definición 2.13, cláusula (II), podemos concluir $T \in I_\tau(B \to C)$

(γ) $C \in \tau$ y $\neg C \notin \tau$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $T \in I_\tau(C)$ y $F \notin I_\tau(C)$. Adicionalmente, por la Definición 2.13, cláusula (II), podemos concluir $T \in I_\tau(B \to C)$

(δ) $C \in \tau$ y $\neg B \in \tau$; por la hipótesis de inducción podemos concluir que $T \in I_\tau(C)$ y $F \in I_\tau(B)$. Adicionalmente, por la Definición 2.13, cláusula (II), podemos concluir $T \in I_\tau(B \to C)$

■

7 Lema de extensión, primacía y Teorema de completud para FDF4

En este apartado, en un primer término, probaremos los lemas de extensión y primacía para extensión similar de FDF4, concepto que desarrollaremos a continuación. Después, aprovechando su potencia, daremos una prueba de completud fuerte y probaremos que FDF4 es una axiomatización de la matriz M4

7.1 Lema de extensión y primacía para EsFDF4

Definición 2.34 (Extensiones y expansiones similares): Sea S una lógica cualquiera. Entonces, EsS será una extensión o expansión similar a S syss las reglas de EsS forman parte del conjunto de las reglas de S

Lema 2.35 (Lema auxiliar al Lema de extensión para EsFDF4): Sea A una fbf y Γ un conjunto finito de fbf $\{B_1, ..., B_n\}$ tales que $\Gamma \vdash_{EsFDF4} A$. Entonces, para una fbf cualquiera C, $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee A$

Prueba:

Asumiendo la hipótesis del lema, procedemos por inducción sobre la longitud de la secuencia de la prueba de la derivabilidad de A con respecto Γ en EsFDF4:

(I) $A \in \Gamma$: Por A2 tenemos $\vdash_{EsFDF4} (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \rightarrow A$, y por Sumación y el Teorema 2.7.(II).(a) conseguimos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee A$

(II) A es un axioma: Dado que A es un axioma tenemos $\vdash_{EsFDF4} A$. Por A3 obtenemos $\vdash_{EsFDF4} A \rightarrow .C \vee A$, y aplicando R2 conseguimos $\vdash_{EsFDF4} C \vee A$. Entonces $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee A$ por el Teorema 2.7.(I)

(III) A es derivada a través de R1: A tiene la forma $F \vee (D \wedge E)$ para fbf cualesquiera D, E y F. Por la hipótesis de inducción tenemos que $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (F \vee D)$ y $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (F \vee E)$. Aplicando Asociativa de la Disyunción tenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee F) \vee D$ y $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee F) \vee E$, y ahora, aplicando R1, conseguimos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee F) \vee (D \wedge E)$, y usando de nuevo la Asociativa de la Disyunción obtenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (F \vee (D \wedge E))$, tal y como pretendíamos.

(IV) A es derivada a través de R2: A es $D \vee E$ para dos fbf D y E. Por la hipótesis de inducción tenemos que $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (D \vee F)$ y $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee [D \vee (F \rightarrow E)]$ donde F es otra fbf cualquiera. Aplicando Asociativa de la Disyunción tenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee F$ y $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee (F \rightarrow E)$, y ahora, aplicando Modus Ponens en su forma disyuntiva, conseguimos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee E$, y usando de nuevo la Asociativa de la Disyunción obtenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (D \vee E)$, tal y como pretendíamos.

(V) A es derivada a través de R3: A es $D \vee (E \rightarrow G)$ para fbf cualesquiera D, E y G. Por la hipótesis de inducción tenemos que $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (D \vee (E \rightarrow F))$ y $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (D \vee (F \rightarrow G))$ donde F es otra fbf cualquiera. Aplicando Asociativa de la Disyunción tenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee (E \rightarrow F)$ y $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4}$ $(C \vee D) \vee (F \rightarrow G)$, y ahora, aplicando R3, conseguimos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4}$ $(C \vee D) \vee (E \rightarrow G)$, y usando de nuevo la Asociativa de la Disyunción obtenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (D \vee (E \rightarrow G))$, tal y como pretendíamos.

(VI) A es derivada a través de R4: Sean D, E, F y G fbf cualesquiera. A tiene la forma $D \vee (E \rightarrow (F \wedge G))$. Por la hipótesis de inducción tenemos que $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (D \vee (E \rightarrow F))$ y $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4}$ $C \vee (D \vee (E \rightarrow G))$. Aplicando Asociativa de la Disyunción tenemos que $C \vee$ $(B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee (E \rightarrow F)$ y $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4}$ $(C \vee D) \vee (E \rightarrow G)$, y ahora, aplicando R4, conseguimos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4}$ $(C \vee D) \vee (E \rightarrow (F \wedge G))$, y usando de nuevo Asociativa de la Disyunción obtenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (D \vee (E \rightarrow (F \wedge G)))$, tal y como pretendíamos.

(VII) A es derivada a través de R5: A es $D \vee ((E \vee F) \rightarrow G)$ para fbf D, E, F y G cualesquiera. Por la hipótesis de inducción tenemos que $C \vee$ $(B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (D \vee (E \rightarrow G))$ y $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee$ $(D \vee (F \rightarrow G))$. Aplicando Asociativa de la Disyunción tenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n)$ $\vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee (E \rightarrow G)$ y $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee (F \rightarrow G)$, y ahora, aplicando R5, conseguimos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee$ $((E \vee F) \rightarrow G)$, y usando de nuevo Asociativa de la Disyunción obtenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (D \vee ((E \vee F) \rightarrow G))$, tal y como pretendíamos.

(VIII) A es derivada a través de R6: A es $D \vee (\neg F \rightarrow \neg E)$ para fbf D, E, F. Por la hipótesis de inducción tenemos que $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee$ $(D \vee (E \rightarrow F))$. Aplicando Asociativa de la Disyunción tenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n)$ $\vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee (E \rightarrow F)$, y ahora, aplicando R6, conseguimos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n)$ $\vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee (\neg F \rightarrow \neg E)$, y usando de nuevo Asociativa de la Disyunción obtenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (D \vee E)$, tal y como pretendíamos.

(IX) A es derivada a través de R7: A es $D \vee \neg (E \rightarrow F)$ para fbf D, E y F. Por la hipótesis de inducción tenemos que $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4}$ $C \vee (D \vee E)$ y $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (D \vee \neg F)$. Aplicando Asociativa de la Disyunción tenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee E$ y $C \vee$ $(B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee \neg F$, y ahora, aplicando R7, conseguimos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} (C \vee D) \vee \neg (E \rightarrow F)$, y usando de nuevo Asociativa de la Disyunción obtenemos $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{EsFDF4} C \vee (D \vee \neg (E \rightarrow F))$, tal y como pretendíamos.

Así queda probado el Lema auxiliar al Lema de extensión para EsFDF4

■

Definición 2.36 (Conjunto maximal en EsFDF4): Sea Γ un conjunto de fbf. Γ es un conjunto maximal syss $\Gamma \overset{d}{\nvdash}_{EsFDF4} \bar{\Gamma}$, donde $\bar{\Gamma}$ representa el conjunto complementario al conjunto Γ

Lema 2.37 (Lema de extensión para EsFDF4): Sean Γ y Θ conjuntos de fbf tales que $\Gamma \overset{d}{\nvdash}_{EsFDF4} \Theta$. Entonces hay conjuntos de fbf Γ' y Θ' tales que $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\Theta \subseteq \Theta'$, $\Theta' = \bar{\Gamma}'$ y $\Gamma' \overset{d}{\nvdash}_{EsFDF4} \Theta'$

Prueba:
Asumimos la hipótesis del Lema 2.37 y sea $A_1, ..., A_n, ...$ una enumeración de las fbf. Los conjuntos Γ' y Θ' son definidos como sigue:
$\Gamma' = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k$; $\Theta' = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \Theta_k$
Donde $\Gamma_0 = \Gamma$ y $\Theta_0 = \Theta$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, Γ_{k+1} y Θ_{k+1} se construyen como sigue:
(I) Si $\Gamma_k \cup \{A_{k+1}\} \overset{d}{\vdash}_{EsFDF4} \Theta_k$, entonces $\Gamma_{k+1} = \Gamma_k$ y $\Theta_{k+1} = \Theta_k \cup \{A_{k+1}\}$
(II) Si $\Gamma_k \cup \{A_{k+1}\} \overset{d}{\nvdash}_{EsFDF4} \Theta_k$, entonces $\Gamma_{k+1} = \Gamma_k \cup \{A_{k+1}\}$ y $\Theta_{k+1} = \Theta_k$
Como consecuencia de la construcción, tenemos que $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\Theta \subseteq \Theta'$ y $\Gamma' \cup \Theta' = \mathfrak{F}$
Probamos por inducción:
(a) $\Gamma_k \overset{d}{\nvdash}_{EsFDF4} \Theta_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$
Procedemos por reductio ad absurdum, así que suponemos que para algún $i \in \mathbb{N}$ se cumple que:
(b) $\Gamma_i \overset{d}{\nvdash}_{EsFDF4} \Theta_i$ pero $\Gamma_{i+1} \overset{d}{\vdash}_{EsFDF4} \Theta_{i+1}$
En este momento tenemos que considerar dos posibilidades, las dos posibles construcciones de Γ_{i+1} y Θ_{i+1}, tal y como se han definido en (I) y (II):
(i) $\Gamma_i \cup \{A_{i+1}\} \overset{d}{\nvdash}_{EsFDF4} \Theta_i$
Por (II) tenemos que $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{A_{i+1}\}$ y $\Theta_{i+1} = \Theta_i$. Por la hipótesis de reductio, (b), sabemos que $\Gamma_i \cup \{A_{i+1}\} \overset{d}{\vdash}_{EsFDF4} \Theta_i$, lo cual nos lleva a una contradicción
(ii) $\Gamma_i \cup \{A_{i+1}\} \overset{d}{\vdash}_{EsFDF4} \Theta_i$
Por (I) sabemos que $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$ y $\Theta_{i+1} = \Theta_i \cup \{A_{i+1}\}$. Por la hipótesis de reductio, (b) tenemos que:
1. $\Gamma_i \overset{d}{\vdash}_{EsFDF4} \Theta_i \cup \{A_{i+1}\}$
Suponemos ahora que las fórmulas de Γ_i y Θ_i en esta derivación son $B_1, ..., B_m$ y $C_1, ..., C_n$ tales que m, $n \geq 1$, respectivamente, y nos referiremos con B a la conjunción de $B_1, ..., B_m$, es decir, $B_1 \wedge ... \wedge B_m$, y con C a la disyunción de $C_1, ..., C_m$, es decir, $C_1 \vee ... \vee C_n$. Gracias a esto, podemos reescribir 1 como sigue:
2. $B \vdash_{EsFDF4} C \vee A_{i+1}$
Por otro lado, dada la hipótesis (ii), hay una conjunción B' de elementos de Γ_i y una disyunción C' de elementos de Θ_i tales que:
3. $B' \wedge A_{i+1} \vdash_{EsFDF4} C'$
Nos referiremos ahora con B'' a la conjunción de B y B', $B \wedge B'$, y con C'' a la disyunción de C y C', $C \vee C'$. Hemos de probar:

4. $B'' \vdash_{EsFDF4} C''$

Es decir, $\Gamma_i \vdash^{d}_{EsFDF4} \Theta_i$, contradiciendo la hipótesis de reductio, (b), y así probando (a). Por el Teorema 2.8 y 3 tenemos:

5. $B'' \wedge A_{i+1} \vdash_{EsFDF4} C''$

Por 2 y el Teorema 2.9 conseguimos:

6. $B'' \vdash_{EsFDF4} C'' \vee A_{i+1}$

Ahora, gracias al recién probado 6 y el Teorema 2.10 obtenemos:

7. $B'' \vdash_{EsFDF4} C'' \vee (B'' \wedge A_{i+1})$

Y por 5 y el Lema 2.35:

8. $C'' \vee (B'' \wedge A_{i+1}) \vdash_{EsFDF4} C'' \vee C''$

Lo que,simplificando, nos da:

9. $C'' \vee (B'' \wedge A_{i+1}) \vdash_{EsFDF4} C''$

Por último, gracias a 7 y 9, obtenemos:

$B'' \vdash_{EsFDF4} C''$

Que, como habíamos señalado más arriba, es el equivalente a:

$\Gamma_i \vdash^{d}_{EsFDF4} \Theta_i$

Contradiciendo así la hipótesis de reductio (b). Consecuentemente (a), es decir, $\Gamma_k \nvdash^{d}_{EsFDF4} \Theta_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, queda probado. Así tenemos conjuntos de fbf Γ' y Θ' tales que $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\Theta \subseteq \Theta'$, $\Gamma' \nvdash^{d}_{EsFDF4} \Theta'$ y $\Theta = \bar{\Gamma}$, tal y como se requería. Nótese, en último término, que Γ' es maximal, ya que $\Gamma' \nvdash^{d}_{EsFDF4} \bar{\Gamma}'$

Así queda probado el Lema 2.37 o Lema de extensión para EsFDF4

■

Lema 2.38 (Lema de primacía para EsFDF4): Si Γ es un conjunto EsFDF4-Maximal, entonces Γ es una teoría prima.

Prueba:

Sea Γ un conjunto maximal de fbf en EsFDF4. Primero probamos que Γ es una teoría. Para ello probamos que se encuentra cerrada por Adjunción, EsFDF4-Implicación y la versión disyuntiva de Contraejemplo:

(I) Adjunción: Suponemos $A \in \Gamma$ y $B \in \Gamma$, y $A \wedge B \notin \Gamma$ como hipótesis de reductio. Entonces $\Gamma \vdash_{EsFDF4} A$ y $\Gamma \vdash_{EsFDF4} B$, lo que por Adjunción nos da $\Gamma \vdash_{EsFDF4} A \wedge B$, lo que incurre en una contradicción con la maximalidad de Γ

(II) EsFDF4-Implicación: Tomamos como hipótesis $\vdash_{EsFDF4} A \to B$ y $A \in \Gamma$, y $B \notin \Gamma$ como hipótesis de reductio. Obtenemos $\Gamma \vdash_{EsFDF4} A \to B$ y $\Gamma \vdash_{EsFDF4} A$, y de ello, por Modus Ponens, $\Gamma \vdash_{EsFDF4} B$, lo que produce una contradicción con la maximalidad de Γ como en el caso anterior.

(III) Contraejemplo Disyuntivo: Partimos de $C \vee A \in \Gamma$ y $C \vee \neg B \in \Gamma$, y $C \vee \neg (A \to B) \notin \Gamma$ como hipótesis de reductio. Sabemos que $\Gamma \vdash_{EsFDF4} C \vee A$ y $\Gamma \vdash_{EsFDF4} C \vee \neg B$. De ahí, por Contraejemplo Disyuntivo, tenemos que $\Gamma \vdash_{EsFDF4} C \vee \neg (A \to B)$, lo supone una contradicción con la maximalidad de Γ

Así queda probado que Γ es una teoría, y ahora probamos que, además, es prima:

(IV) Primacía: Suponemos que $A \vee B \in \Gamma$, $A \notin \Gamma$, y $B \notin \Gamma$ como la hipótesis de reductio. Entonces A o B son derivables de Γ, lo que contradice su maximalidad.

■

Definición 2.39 (El conjunto de consecuencias del conjunto Γ con respecto a EsFDF4): Sea $Cn\Gamma$[EsFDF4] el conjunto de consecuencias en EsFDF4 de un conjunto de fbf cualquiera Γ. Este conjunto queda definido como sigue: $Cn\Gamma[\text{EsFDF4}] = \{A | \Gamma \vdash_{EsFDF4} A\}$

Observación 2.40 ($Cn\Gamma$[EsFDF4] es una teoría normal): Es obvio que para cualquier conjunto de fbf Γ, $Cn\Gamma$[EsFDF4] se encuentra cerrado bajo las reglas de EsFDF4 y contendrá todos los teoremas de esta lógica. Consecuentemente Γ estará también cerrado por EsFDF4-implicación

7.2 Teorema de completud

Teorema 2.41 (Teorema de completud para FDF4): Para cualquier fbf de FDF4 A, si $\Gamma \models_{BD} A$ entonces $\Gamma \vdash_{FDF4} A$

Prueba:

Sea Γ un conjunto de fbf cualquiera y A una fbf cualquiera; suponemos que $\Gamma \nvdash_{FDF4} A$ y desde aquí probaremos que $\Gamma \nvDash_{BD} A$. Dada la hipótesis tenemos que $A \notin Cn\Gamma[FDF4]$ y, por tanto, $Cn\Gamma[FDF4] \nvdash^{d}_{FDF4} A$, ya que si no tendríamos que $B_1 \wedge ... \wedge B_n \vdash_{FDF4} A$ para fbf tales que $B_1 \wedge ... \wedge B_n \in Cn\Gamma[FDF4]$, dando como resultado que A se encontraría en $Cn\Gamma[FDF4]$. Por el Lema 2.37, el Lema de extensión para FDF4, existe un conjunto maximal Γ' tal que $Cn\Gamma[FDF4] \subseteq \Gamma'$ y, además, $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y $A \notin \Gamma'$. Por el Lema 2.38 Γ' es una teoría prima, y una teoría normal por la Observación 2.40. Por tanto, se generará una τ-interpretación tal que $T \in I_\tau(\Gamma)$ pero $T \notin I_\tau(A)$. De manera adicional, sabríamos que el modelo canónico desarrollado en la Definición 2.30 es, de hecho, un modelo por el Teorema 2.32 y, en última instancia, tendríamos que $\Gamma \nvDash_\tau A$ por la Definición 2.30 y, desde aquí $\Gamma \nvDash_{BD} A$ por la Definición 2.12 y Teorema 2.32.

■

Corolario 2.42 (El sistema FDF4 es una axiomatización de la matriz M4): El sistema FDF4 que hemos definido es una axiomatización de la matriz M4 desarrollada en la Definición 1.2

Prueba:

Dado que, para FDF4, hemos probado corrección y completud respecto de la BD-semántica, podemos concluir, gracias a la equivalencia de los conceptos de validez, probada en el Teorema 2.19, que el sistema FDF4 es una axiomatización de la matriz M4.

8 Segunda axiomatización: EF4

Si para la primera axiomatización hemos utilizado el sistema FDE para esta segunda utilizaremos el sistema de la implicación relevante y necesaria, E. En particular utilizaremos la versión sin el axioma de Reductio ($A \to \neg A \to .\neg A$), debido a que la matriz M4 no lo tolera. De la misma manera que llamamos FDF4 al primer sistema por estar basado en FDE, a este segundo lo nombraremos como EF4 por estar basado en E, además del uso central de la falsedad que hace la matriz y su forma tetravaluada.
Damos así la axiomatización de EF4:

A1. $A \to A$
A2. $A \wedge B \to .A / A \wedge B \to .B$
A3. $A \to .A \vee B / B \to .A \vee B$
A4. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to .A \to (B \wedge C)$
A5. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to .(A \vee B) \to C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \to .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \to B \to .(B \to C) \to (A \to C)$
A8. $A \to B \to .(C \to A) \to (C \to B)$
A9. $A \to \neg B \to .B \to \neg A$
A10. $\neg\neg A \to A$
A11. $A \to (A \to B) \to .A \to B$
A12. $[(A \to A) \wedge (B \to B)] \to C \to .C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$
A14. $B \wedge \neg (A \to B) \to .\neg B$
A15. $\neg (A \to B) \to .A \vee \neg B$
R1. $A \, y \, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \to B \, y \, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A \, y \, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \to B)$

8.1 Sobre la independencia de los axiomas de EF4

Tal y como ocurría en FDF4, los axiomas resultan independientes unos de otros con la excepción de A13. A fin de comprobar la independencia puede recurrirse, al igual que antes, al uso de la aplicación *MaGIC*, en donde los otros axiomas añadidos a E, A14 y A15, generan álgebras ya desde los tres valores de verdad.

8.2 Sobre la elección de E

Al igual que se justificó la elección de FDE para la primera axiomatización, resulta natural justificar también la elección de E como base para esta segunda axiomatización. Si bien la primera elección, la de FDE, estaba justificada en motivos eminentemente prácticos, el hecho de ser un sistema muy débil, la elección de E está basada en dos puntos principales:

El hecho de tratarse de una expansión implicativa de la matriz tetravaluada de Belnap establece una correlación inevitable con el sistema tetravaluado de Brady BN4. Y si BN4 estaba pensado como una expansión que sustentase una versión tetravaluada del sistema de la relevancia R, EF4 se alza entonces como la contrapartida tetravaluada basada en el sistema de la implicación necesaria E.

Adicionalmente se puede justificar la elección de E por el origen de la matriz tetravaluada de Belnap, debido a Smiley, quien hizo la aportación de la matriz característica de FDE. Así, esta axiomatización permite mostrar cómo la matriz original de Smiley, a través de una expansión implicativa, puede actuar como la base de un sistema extremadamente similar a E y con unas capacidades y unas características realmente interesantes.

Por supuesto cabe mencionar el valor histórico que posee E a la hora de pensar en él como base de un sistema y es que, a pesar del tiempo transcurrido desde su formulación, sigue siendo uno de los sistemas más importantes a la hora de hablar de lógicas de la relevancia.

8.3 Sintaxis del sistema EF4

A continuación probaremos algunos teoremas importantes de EF4 para lo que nos apoyaremos en aquellos que ya hemos probado con anterioridad:

Regla de Transitividad: $A \to B$ y $B \to C \Rightarrow A \to C$

1. $A \to B$	Hipótesis
2. $B \to C$	Hipótesis
3. $A \to B \to .(B \to C) \to (A \to C)$	A7
4. $B \to C \to .A \to C$	R2, 1, 3
5. $A \to C$	R2, 2, 4

Importación: $A \to (B \to C) \to .(A \wedge B) \to C$

1. $A \wedge B \to .A$	A2
2. $A \to (B \to C) \to .(A \wedge B) \to (B \to C)$	A7, 1
3. $A \wedge B \to .B$	A2
4. $B \to C \to .(A \wedge B) \to C$	A7, 2
5. $(A \wedge B) \to (B \to C) \to .(A \wedge B) \to [(A \wedge B) \to C]$	A8, 4
6. $A \to (B \to C) \to .(A \wedge B) \to [(A \wedge B) \to C]$	Transitividad, 2, 5
7. $(A \wedge B) \to [(A \wedge B) \to C] \to .(A \wedge B) \to C$	A11
8. $A \to (B \to C) \to .(A \wedge B) \to C$	Transitividad, 6, 7

Doble Negación (II): $A \to \neg\neg A$

1. $\neg A \to \neg A \to .A \to \neg\neg A$	A9
2. $\neg A \to \neg A$	A1

3. $A \to .\neg\neg A$	R2, 1, 2

Contraposición:
(II): $A \to B \to .\neg B \to \neg A$

1. $A \to \neg\neg B \to .\neg B \to \neg A$	A9
2. $B \to \neg\neg B$	Doble Negación (II)
3. $A \to B \to .A \to \neg\neg B$	A8, 2
4. $A \to B \to .\neg B \to \neg A$	Transitividad, 1, 3

(III): $\neg A \to \neg B \to .B \to A$

1. $\neg A \to \neg B \to .B \to \neg\neg A$	A9
2. $\neg\neg A \to A$	A10
3. $B \to \neg\neg A \to .B \to A$	A8, 2
4. $\neg A \to \neg B \to .B \to A$	Transitividad, 1, 3

(IV): $\neg A \to B \to .\neg B \to A$

1. $\neg A \to B \to .\neg B \to \neg\neg A$	A9
2. $\neg\neg A \to A$	A10
3. $\neg B \to \neg\neg A \to .\neg B \to A$	A8, 2
4. $\neg A \to B \to .\neg B \to A$	Transitividad, 1, 3

(V): $\neg(A \to B) \to .\neg(\neg B \to \neg A)$

1. $\neg B \to \neg A \to .A \to B$	Contraposición (III)
2. $\neg(A \to B) \to .\neg(\neg B \to \neg A)$	Contraposición (II), 1

Axioma Modus Ponens: $(A \to B) \wedge A \to .B$

1. $A \to B \to .A \to B$	A1
2. $(A \to B) \wedge A \to .B$	Importación, 1

Axioma Modus Tollens: $(A \to B) \wedge \neg B \to .\neg A$

1. $A \to B \to .\neg B \to \neg A$	A9
2. $(A \to B) \wedge \neg B \to .\neg A$	Importación, 1

TE5: $\neg A \wedge \neg(A \to B) \to .A$

1. $\neg A \wedge \neg(\neg B \to \neg A) \to .\neg\neg A$	A14
2. $\neg A \wedge \neg(\neg B \to \neg A) \to .A$	A10, 1
3. $\neg(A \to B) \to .\neg(\neg B \to \neg A)$	Contraposición (V)
4. $\neg A \wedge \neg(A \to B) \to .\neg A \wedge \neg(\neg B \to \neg A)$	Producto, 3
5. $\neg A \wedge \neg(A \to B) \to .A$	Transitividad, 2, 4

Mingle: $A \to .A \to A$

1. $A \to .\neg A \vee (A \to A)$	TE3
2. $A \wedge A \to .A \wedge [\neg A \vee (A \to A)]$	Producto, 1
3. $A \to A$	A1
4. $A \to A$	A1
5. $A \to .A \wedge A$	A4, 3, 4
6. $A \to .A \wedge [\neg A \vee (A \to A)]$	Transitividad, 2, 5
7. $A \wedge [\neg A \vee (A \to A)] \to .(A \wedge \neg A) \vee [A \wedge (A \to A)]$	A6
8. $A \to .(A \wedge \neg A) \vee [A \wedge (A \to A)]$	Transitividad, 6, 7
9. $A \wedge \neg A \to .A \to A$	TE4
10. $A \wedge (A \to A) \to .A \to A$	A2
11. $(A \wedge \neg A) \vee [A \wedge (A \to A)] \to .A \to A$	A5, 9, 10
12. $A \to .A \to A$	Transitividad, 8, 11

Aserción Especial: $(A \to A) \to B \to .B$

1. $A \to A \to .A \to A$	A1
2. $A \to A \to .A \to A$	A1
3. $A \to A \to .(A \to A) \wedge (A \to A)$	A4, 1, 2
4. $[(A \to A) \wedge (A \to A)] \to B \to .B$	A12
5. $(A \to A) \to B \to .B$	Transitividad, 3, 4

Teorema I: $A \to .\neg A \vee (\neg A \to B)$

1. $A \wedge \neg(\neg A \to B) \to .\neg A$	TE5
2. $\neg\neg A \to .\neg(A \wedge \neg(\neg A \to B))$	Contraposición II, 1
3. $A \to .\neg(A \wedge \neg(\neg A \to B))$	Doble Negación II, 2
4. $A \to .\neg A \vee \neg\neg(\neg A \to B)$	De Morgan (V), 4
5. $A \to .\neg A \vee (\neg A \to B)$	Doble Negación II, 4

Teorema II: $A \to .B \to (A \vee B)$

1. $A \vee B \to .(A \vee B) \to (A \vee B)$	Mingle
2. $A \to .A \vee B$	A3
3. $A \to .(A \vee B) \to (A \vee B)$	Transitividad, 1, 2
4. $B \to .A \vee B$	A3
5. $(A \vee B) \to (A \vee B) \to .B \to (A \vee B)$	A7, 4
6. $A \to .B \to (A \vee B)$	Transitividad, 3, 5

Teorema III: $\neg A \to .B \vee [(A \wedge B) \to C]$

1. $\neg(A \wedge B) \to .(A \wedge B) \vee [(A \wedge B) \to C]$	TE2
2. $A \wedge B \to .A$	A2
3. $\neg A \to .\neg(A \wedge B)$	Contraposición II, 2
4. $\neg A \to .(A \wedge B) \vee [(A \wedge B) \to C]$	Transitividad, 1, 3

5. $A \wedge B \rightarrow .B$	A2
6. $B \rightarrow .B \vee [(A \wedge B) \rightarrow C]$	A3
7. $A \wedge B \rightarrow .B \vee [(A \wedge B) \rightarrow C]$	Transitividad, 5, 6
8. $(A \wedge B) \rightarrow C \rightarrow .B \vee [(A \wedge B) \rightarrow C]$	A3
9. $(A \wedge B) \vee [(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow .B \vee [(A \wedge B) \rightarrow C]$	A5, 7, 8
10. $\neg A \rightarrow .B \vee [(A \wedge B) \rightarrow C]$	Transitividad, 4, 9

Regla de Introducción Condicionada de la Conjunción: $A \rightarrow C$ y $B \rightarrow D \Rightarrow A \wedge B \rightarrow .C \wedge D$

1. $A \rightarrow C$	Hipótesis
2. $B \rightarrow D$	Hipótesis
3. $A \wedge B \rightarrow .A$	A2
4. $A \wedge B \rightarrow .C$	Transitividad, 1, 3
5. $A \wedge B \rightarrow .B$	A2
6. $A \wedge B \rightarrow .D$	Transitividad, 2, 5
7. $A \wedge B \rightarrow .C \wedge D$	A4, 4, 6

9 Equivalencia de FDF4 y EF4

Teorema 2.43 (Equivalencia de FDF4 y EF4): Los sistemas FDF4 y EF4 son deductivamente equivalentes, es decir, para una fbf cualquiera A, $\vdash_{FDF4} A$ syss $\vdash_{EF4} A$

Prueba:

De izquierda a derecha; $\vdash_{FDF4} A \Rightarrow \vdash_{EF4} A$:

R1, R2 y R7 de FDF4 se corresponden con R1, R2 y R3 de EF4. Las versiones no disyuntivas de R3-R6 de FDF4 se obtienen de A4, A5, A7, A9 y A10 de EF4 respectivamente y, a través de Sumación y Distribución se obtienen sus versiones disyuntivas. Los axiomas FDF4 son axiomas del propio EF4, a excepción de A5, A7, A8 y A10 de FDF4 que son derivables desde el resto de axiomas como hemos probado en el apartado correspondiente a la sintaxis de EF4.

De derecha a izquierda; $\vdash_{EF4} A \Rightarrow \vdash_{FDF4} A$:

Las reglas de EF4 y los axiomas, o bien forman parte de FDF4, o bien son válidos según la matriz M4, lo que por el Teorema 2.41, teorema de completud para FDF4, que hemos probado permite que se siga que son teoremas de FDF4. ■

Corolario 2.44 (Propiedades de EF4): EF4 es un sistema correcto y completo en sentido fuerte, y es una axiomatización de la matriz M4

Prueba:

Dado que FDF4 es correcto y completo en sentido fuerte por los Teoremas 2.22 y 2.41, y el Corolario 2.42, se sigue de manera automática por el Teorema

2.43 en el que se prueba la equivalencia de EF4 con FDF4

■

10 Características de FDF4 y EF4

Hasta ahora hemos llevado a cabo un estudio pormenorizado de los dos principales sistemas que hemos definido: FDF4 y EF4. Hemos obtenido resultados de gran importancia como son corrección fuerte y completud fuerte con respecto a las dos semánticas definidas. Adicionalmente hemos probado la equivalencia tanto de las semánticas como de los sistemas, y que estos últimos constituyen una axiomatización de la matriz M4 que hemos incorporado al principio en la Definición 1.2. Sin embargo, a pesar de la importancia de todos estos hechos, aún nos quedan ciertos resultados que ofrecer; en particular hemos de hablar de la VSP incluida en la Definición 0.3, la *Quasi Relevance Property*, Propiedad de la Cuasi-Relevancia en castellano, y la paraconsistencia de la Definición 0.6, todo ello en relación a los sistemas FDF4 y EF4.

Proposición 2.45 (FDF4 y EF4 no poseen la VSP): Los sistemas FDF4 y EF4 no poseen la *Variable Sharing Property*

Prueba:

FDF4 no posee la VSP porque valida el teorema $\neg(A \to A) \to .(B \to B)$, tesis de R-Mingle (Cf. [Anderson y Belnap, 1975]); teorema que puede ser comprobado por medio de [González, 2012]. Sin embargo, FDF4 falsa las paradojas de la implicación más prominentes y flagrantes como son $\neg A \to .A \to B$, $A \to .B \to A$ ó $(A \to B) \vee (B \to A)$. Dado que FDF4 y EF4 son equivalentes tal y como vimos en el Teorema 2.43, EF4 tampoco posee la VSP.

■

Definición 2.46 (Propiedad de la Cuasi-Relevancia [PCR]): Si $A \to B$ es un teorema, entonces A y B tienen, al menos, una variable proposicional en común, o $\neg A$ y B son teoremas

Proposición 2.47 (FDF4 y EF4 tienen la PCR): (I) Si $\vdash_{FDF4} A \to B$, entonces o bien (a) A y B tienen al menos una variable proposicional en común; o bien (b) $\vdash_{FDF4} \neg A$ y $\vdash_{FDF4} B$

(II) Si $\vdash_{EF4} A \to B$, entonces o bien (a) A y B tienen al menos una variable proposicional en común; o bien (b) $\vdash_{EF4} \neg A$ y $\vdash_{EF4} B$

Prueba:

Probamos en primer término (I):

Supongamos el caso en el que $\vdash_{FDF4} A \to B$ pero A y B no tienen ninguna variable proposicional en común. Suponemos adicionalmente por reductio que $\nvdash_{FDF4} \neg A$ y $\nvdash_{FDF4} B$. Sabemos, por los Teoremas 2.19 y 2.22, que $\nvDash_{M4} \neg A$ ó $\nvDash_{M4} B$. Entonces existirán M4-interpretaciones I_{M4} y I'_{M4} tales que: (i) $0 \in$

$I_{M4}(\neg A)$, (ii) $1 \in I_{M4}(\neg A)$, (iii) $0 \in I'_{M4}(B)$, ó (iv) $1 \in I'_{M4}(B)$. Desde aquí probaremos que si la hipótesis $\vdash_{FDF4} A \to B$ es cierta, es imposible que se dé ninguno de los casos que hemos expuesto, y así habremos probado la Proposición 2.47. En aras de la simplificación, daremos las pruebas para (i) y (iv), puesto que los casos (ii) y (iii) se prueban de manera similar. Para el caso (i) $0 \in I_{M4}(\neg A)$ sabemos que $3 \in I_{M4}(A)$. Sea entonces I''_{M4} una M4-interpretación idéntica a I_{M4}, excepto que para cada variable proposicional p_i que aparece en B, $2 \in I''_{M4}(p_i)$. Necesariamente I''_{M4} es consistente, puesto que A y B no tienen variables proposicionales en común, tal y como hemos supuesto. Necesariamente $3 \in I''_{M4}(A)$ y $2 \in I''_{M4}(B)$, ya que $\{2\}$ se encuentra cerrado por $\wedge$, $\vee$, $\to$ y $\neg$. Así $0 \in I''_{M4}(A \to B)$, lo que nos lleva a $\nvdash_{FDF4} A \to B$, contradiciendo nuestra hipótesis inicial. Para el caso (iv) $1 \in I'_{M4}(B)$. Sea I''_{M4} una M4-interpretación igual a I'_{M4} a excepción de que para toda variable proposicional p_i que aparece en A, $2 \in I''_{M4}(p_i)$. De manera similar al caso anterior, I''_{M4} es consistente, ya que A y B no tienen variables proposicionales en común. Tenemos que $1 \in I''_{M4}(B)$ y $2 \in I''_{M4}(A)$, ya que $\{2\}$ se encuentra cerrado por $\wedge$, $\vee$, $\to$ y $\neg$. De esta manera $0 \in I''_{M4}(A \to B)$ y, entonces, $\nvdash_{FDF4} A \to B$, contradiciendo de nuevo la hipótesis inicial.

Probamos (II):

La prueba es automática por el Teorema 2.43 y el primer apartado de esta Proposición 2.47

■

Proposición 2.48 (FDF4 y EF4 son paraconsistentes): Los sistemas FDF4 y EF4 que hemos definido son paraconsistentes

Prueba:

Basándonos en la Definición 0.6, para esta prueba hemos de probar que la regla ECQ no es demostrable en FDF4 y EF4. Probamos primero para FDF4; suponemos una M4-interpretación I_{M4} para variables proposicionales p_i y p_m tal que $2 \in I_{M4}(p_i)$ y $1 \in I_{M4}(p_m)$. Entonces $p_i, \neg p_i \nvDash_{M4} p_m$, haciendo que ECQ no sea demostrable en FDF4. Para el caso de EF4 nos basamos en la equivalencia de FDF4 y EF4 que probamos en el Teorema 2.43

■

Parte III

Implementación de la modalidad para la matriz M4

En esta tercera parte desarrollaremos la modalidad para la segunda axiomatización, EF4. Incluiremos, nominalmente, tres conceptos de modalidad distintos y desarrollaremos hasta cinco axiomatizaciones diferentes. Por una parte introduciremos las ideas sobre modalidad para lógicas tetravaluadas expuestas por Font y Rius, a su vez renovadas por Beziau. Estas ideas se remontarían hasta el trabajo de los algebristas portugueses. De estos últimos es necesario destacar a Monteiro, y por él, este sistema lo denominaremos EF4-M. Por otra parte, dado que partimos de un sistema basado en E, usaremos la idea de modalidad por extensión interdefinicional que desarrollaron Anderson y Belnap para el mismo sistema. Adicionalmente, y ya que se ha mencionado que trabajamos con tres modalidades distintas, incluiremos la modalidad por extensión interdefinicional que Łukasiewicz usase en sus sistemas, a su vez ayudado por Tarski. El interés de la cuestión reside en que la modalidad intrínseca de E y los operadores modales de Łukasiewicz ofrecen el mismo resultado a la hora de definir la modalidad. Así tendremos un segundo sistema al que denominaremos EF4-Ł. Habiendo establecido que desarrollaremos dos sistemas diferentes es importante señalar que en el primero mantendremos fuera las interdefiniciones de los operadores modales para preservar su independencia, lo que resulta justo teniendo en cuenta su origen definicional. Para el segundo sistema, EF4-Ł, daremos cuatro axiomatizaciones distintas. Esto responderá a los diferentes usos de las interdefiniciones modales. Para el primer caso mostraremos cómo, al no incluir ninguna de las interdefiniciones, los operadores de Necesidad y Posibilidad resultan independientes entre si. En el segundo caso, se introducirá la interdefinición del operador de Posibilidad en base al operador de Necesidad, resultando en la eliminación de todos los axiomas basados en la Posibilidad ya que estos pueden obtenerse fácilmente de los axiomas de la Necesidad. De cara a la tercera opción, llevaremos a cabo el proceso contrario: introduciremos el operador de Necesidad en base al operador de Posibilidad, haciendo que sus axiomas resulten prescindibles. En la cuarta y última axiomatización de EF4-Ł, ambos operadores serán expresables por medio de las extensiones interdefinicionales, provocando que la axiomatización resultante sea idéntica a la de EF4.

1 Primera modalidad: EF4-M

Como hemos explicado ya, para este primer sistema modal, EF4-M, utilizaremos la definición de los operadores modales que se remonta a Monteiro, recuperada por Font y Rius, y, más recientemente, por Beziau.

1.1 Nociones previas

Nuestro primer paso consistirá en definir la expansión de la matriz M4 que incluirá los operadores modales, $\mathcal{M}$M4, así como la semántica tetravaluada intrínsecamente ligada a esta:

Definición 3.1 (La matriz $\mathcal{M}$M4): La matriz $\mathcal{M}$M4 se define como una expansión modal de la matriz M4 dada en la Definición 1.2, donde el conjunto f es modificado como sigue: $f = f_{\wedge M4}$, $f_{\vee M4}$, $f_{\rightarrow M4}$, $f_{\neg M4}$, f_{LM4} y f_{MM4}. Para los elementos de f ya desarrollados nos remitiremos a la Definición 1.2. Los nuevos elementos son definidos como sigue:

$LA = 3$ syss $A = 3$; $LA = 0$ en el resto de los casos

$MA = 0$ syss $A = 0$; $MA = 3$ en el resto de los casos

Esto puede ser resumido en las siguientes tablas:

	LA
0	0
1	0
2	0
3	3

	MA
0	0
1	3
2	3
3	3

Proposición 3.2 (No definibilidad de f_{LM4} y f_{MM4}): Las funciones f_{LM4} y f_{MM4} no son definibles desde las funciones $f_{\wedge M4}$, $f_{\vee M4}$, $f_{\rightarrow M4}$ y $f_{\neg M4}$ en la matriz $\mathcal{M}$M4

Prueba:

Basta con mostrar que $f_{\wedge M4}(2, 2) = f_{\vee M4}(2, 2) = f_{\rightarrow M4}(2, 2) = f_{\neg M4}(2) = 2$, mientras que las fórmulas del tipo LA y MA nunca reciben el valor 2.■

Definición 3.3 ($\mathcal{M}$M4-interpretación): Una $\mathcal{M}$M4-interpretación, $I_{\mathcal{M}M4}$, se define como una función desde $\mathfrak{F}$ a K_{M4}, ajustada según la matriz descrita en la Definición 3.1

Definición 3.4 ($\mathcal{M}$M4-consecuencia y $\mathcal{M}$M4-validez): Para cualquier conjunto de fbf Γ y fbf A, $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}M4} A$, A es consecuencia de Γ en la $\mathcal{M}$M4-semántica, syss 2 ó 3 $\in I_{\mathcal{M}M4}(A)$ siempre que 2 ó 3 $\in I_{\mathcal{M}M4}(\Gamma)$ para todas las M4-interpretaciones $I_{\mathcal{M}M4}$ ($I_{\mathcal{M}M4}(\Gamma) = inf\{I_{\mathcal{M}M4}(B) | B \in \Gamma\}$). En particular, $\vDash_{\mathcal{M}M4} A$, A es válida en la $\mathcal{M}$M4-semántica, syss 2 ó 3 $\in I_{\mathcal{M}M4}(A)$ en todas las $\mathcal{M}$M4-interpretaciones. Por $\vDash_{\mathcal{M}M4}$ nos referimos a la relación que acabamos de definir.

A continuación definiremos una nueva instancia de la semántica bivalente tipo Belnap-Dunn que incluya los operadores modales[1]:

[1] La cuestión de la aplicabilidad de la semántica Belnap-Dunn a sistemas modales ha sido tratada en [Odinstov y Wansing, 2010]

Definición 3.5 ($\mathcal{M}$BD-modelos): Un $\mathcal{M}$BD-modelo es una estructura $\left(K_{BD}^4,\ I_{\mathcal{M}BD}\right)$, donde K_{BD}^4 es el conjunto de la Definición 2.11 y $I_{\mathcal{M}BD}$ es una interpretación desde $\mathfrak{F}$ a K_{BD}^4, definida como sigue:

Para las variables proposicionales, p_i, asigna uno de los elementos de K_{BD}^4. Para las fbf correspondientes a la Conjunción, la Disyunción, la Negación y el Condicional, se cumplen las cláusulas de la Definición 2.11 y la Definición 2.13. Para los operadores de Necesidad y Posibilidad, se cumplen las siguientes:

(I) Necesidad:
(a) $F \in I_{\mathcal{M}BD}(LA)$ syss $F \in I_{\mathcal{M}BD}(A)$ ó $T \notin I_{\mathcal{M}BD}(A)$
(b) $T \in I_{\mathcal{M}BD}(LA)$ syss $T \in I_{\mathcal{M}BD}(A)$ y $F \notin I_{\mathcal{M}BD}(A)$
(II) Posibilidad:
(a) $F \in I_{\mathcal{M}BD}(MA)$ syss $F \in I_{\mathcal{M}BD}(A)$ y $T \notin I_{\mathcal{M}BD}(A)$
(b) $T \in I_{\mathcal{M}BD}(MA)$ syss $T \in I_{\mathcal{M}BD}(A)$ ó $F \notin I_{\mathcal{M}BD}(A)$

Definición 3.6 ($\mathcal{M}$BD-consecuencia y $\mathcal{M}$BD-validez): Para cualquier conjunto de fbf Γ y fbf A, $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}BD-M} A$, A es consecuencia de Γ en un $\mathcal{M}$BD-modelo M, syss $T \in I_{\mathcal{M}BD}(A)$ siempre que $T \in I_{\mathcal{M}BD}(\Gamma)$, donde $T \in I_{\mathcal{M}BD}(\Gamma)$ syss $\forall B \in \Gamma\,(T \in I_{\mathcal{M}BD}(B))$; $F \in I_{\mathcal{M}BD}(\Gamma)$ syss $\exists B \in \Gamma\,(F \in I_{\mathcal{M}BD}(B))$. En particular, $\vDash_{\mathcal{M}BD-M} A$, A es verdad en M, syss $T \in I_{\mathcal{M}BD}(A)$. Entonces, $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}BD} A$, A es consecuencia de Γ en la $\mathcal{M}$BD-semántica, syss $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}BD-M} A$ en cada $\mathcal{M}$BD-modelo M. En particular, $\vDash_{\mathcal{M}BD} A$, A es válida en la $\mathcal{M}$BD-semántica, syss $\vDash_{\mathcal{M}BD-M} A$ para cada $\mathcal{M}$BD-modelo M. Por $\vDash_{\mathcal{M}BD}$ nos referimos a la relación que acabamos de definir.

Como hicimos en la parte correspondiente a los sistemas FDF4 y EF4, probaremos que el concepto de validez de ambas semánticas es coextensivo. Para ello nos basaremos en la prueba del Teorema 2.19, donde se prueba la equivalencia de los conceptos de validez, así como de los lemas auxiliares, Lemas 2.16 y 2.18. Así, asumiremos las pruebas para las conectivas no modales y y centraremos nuestros esfuerzos en los operadores de Necesidad y Posibilidad

Observación 3.7 (Cláusulas según la matriz $\mathcal{M}$M4): Sean la cláusulas de la Observación 2.14 las correspondientes a los elementos Conjunción, Disyunción, Negación y Condicional de la matriz M4. Para los nuevos elementos de la matriz $\mathcal{M}$M4, y de acuerdo a las $\mathcal{M}$M4-interpretaciones de la Definición 3.3 y a la matriz $\mathcal{M}$M4, podemos dar las siguientes cláusulas para las conectivas modales:

(I) Necesidad:
(a) $0 \in I_{\mathcal{M}M4}(LA)$ syss $0 \in I_{\mathcal{M}M4}(A)$ ó $1 \in I_{\mathcal{M}M4}(A)$ ó $2 \in I_{\mathcal{M}M4}(A)$
(b) $3 \in I_{\mathcal{M}M4}(LA)$ syss $3 \in I_{\mathcal{M}M4}(A)$
(II) Posibilidad:
(a) $0 \in I_{\mathcal{M}M4}(MA)$ syss $0 \in I_{\mathcal{M}M4}(A)$
(b) $3 \in I_{\mathcal{M}M4}(\neg A)$ syss $1 \in I_{\mathcal{M}M4}(A)$ ó $2 \in I_{\mathcal{M}M4}(A)$ ó $3 \in I_{\mathcal{M}M4}(A)$

Definición 3.8 ($\mathcal{M}$BD-Interpretación correspondiente a una $\mathcal{M}$M4-interpretación):
Sea $I_{\mathcal{M}M4}$ una $\mathcal{M}$M4-interpretación. Entonces, se define una $\mathcal{M}$BD-interpretación $I_{\mathcal{M}BD}$ correspondiente como sigue:
Para cada variable proposicional p_i:

(I) $I_{\mathcal{M}M4}(p_i) = 0$ syss $I_{\mathcal{M}BD}(p_i) = \{F\}$ y $I_{\mathcal{M}BD}(P_i) \neq \{T\}$
(II) $I_{\mathcal{M}M4}(p_i) = 1$ syss $I_{\mathcal{M}BD}(p_i) = \varnothing$
(III) $I_{\mathcal{M}M4}(p_i) = 2$ syss $I_{\mathcal{M}BD}(p_i) = \{T,\ F\}$
(IV) $I_{\mathcal{M}M4}(p_i) = 3$ syss $I_{\mathcal{M}BD}(p_i) = \{T\}$ y $I_{\mathcal{M}BD}(P_i) \neq \{F\}$

Lema 3.9 (Correspondencia de las $I_{\mathcal{M}M4}$ con respecto a las $I_{\mathcal{M}BD}$):
Dada la Definición 3.8, extendemos la equivalencia de las variables proposicionales a las fbf:

Para una fbf cualquiera A se cumple:
(I) $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 0$ syss $I_{\mathcal{M}BD}(A) = \{F\}$ y $I_{\mathcal{M}BD}(A) \neq \{T\}$
(II) $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 1$ syss $I_{\mathcal{M}BD}(A) = \varnothing$
(III) $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 2$ syss $I_{\mathcal{M}BD}(A) = \{T,\ F\}$
(IV) $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 3$ syss $I_{\mathcal{M}BD}(A) = \{T\}$ y $I_{\mathcal{M}BD}(A) \neq \{F\}$

Prueba:

A fin de probar la correspondencia de las $I_{\mathcal{M}M4}$ y las $I_{\mathcal{M}BD}$, hemos de demostrar la equivalencia en la valoración de las fbf con respecto a todos los valores de verdad. Para ello procederemos por inducción sobre k, la complejidad de la fórmula. Probaremos cada paso en los dos sentidos antes de proceder al siguiente. En este apartado probaremos únicamente las conectivas modales. Para el resto pueden consultarse los Lemas 2.16 y 2.18:

(I) Para $k = 1$, A es una variable proposicional y se sigue automáticamente por la Definición 3.7

(II) Para $k \leq n$, donde $n \in \mathbb{N}$, asumimos la hipótesis de inducción

(III) Para $k = n + 1$ existen 2 subcasos:

(a) $0 \in I_{\mathcal{M}M4}(A)$ syss $F \in I_{\mathcal{M}BD}(A)$ y $T \notin I_{\mathcal{M}BD}(A)$

(i) A aparece como una fórmula necesitiva y, por tanto, tiene la forma LB:

De izquierda a derecha tenemos tres casos distintos:

(α) $0 \in I_{\mathcal{M}M4}(B)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y $T \notin I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y según la cláusula (I) de la Definición 3.5 tenemos $F \in I_{\mathcal{M}BD}(LB)$ y $T \notin I_{BD}(LB)$

(β) $1 \in I_{\mathcal{M}M4}(B)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \notin I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y $T \notin I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y según la cláusula (I) de la Definición 3.5 tenemos $F \in I_{\mathcal{M}BD}(LB)$ y $T \notin I_{BD}(LB)$

(γ) $2 \in I_{\mathcal{M}M4}(B)$; por la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y $T \in I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y según la cláusula (I) de la Definición 3.5 tenemos $F \in$

$I_{\mathcal{M}BD}(LB)$ y $T \notin I_{BD}(LB)$

De derecha a izquierda tenemos tres casos distintos:

(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $0 \in I_{M4}(B)$ y por medio de la cláusula (I).(a) de la Observación 3.7 se consigue $0 \in I_{M4}(LB)$

(β) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $1 \in I_{M4}(B)$ y por medio de la cláusula (I).(a) de la Observación 3.7 se consigue $0 \in I_{M4}(LB)$

(γ) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$; según la Hipótesis de inducción se tiene $2 \in I_{M4}(B)$ y por medio de la cláusula (I).(a) de la Observación 3.7 se consigue $0 \in I_{M4}(LB)$

(ii) A aparece como una fórmula posibilitiva y, por tanto, tiene la forma MB:

De izquierda a derecha tenemos un único caso:

(α) $0 \in I_{\mathcal{M}M4}(B)$; por medio de la Hipótesis de inducción se consigue $F \in I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y $T \notin I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y la cláusula (II) de la Definición 3.5 permite obtener $F \in I_{\mathcal{M}BD}(MB)$ y $T \notin I_{BD}(MB)$

De derecha a izquierda tenemos un único caso:

(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$; la Hipótesis de inducción permite obtener $0 \in I_{M4}(B)$ y gracias a la cláusula (II).(a) de la Observación 3.7 tenemos $0 \in I_{M4}(MB)$

(b) $3 \in I_{\mathcal{M}M4}(A)$ syss $F \notin I_{\mathcal{M}BD}(A)$ y $T \in I_{\mathcal{M}BD}(A)$

(i) A aparece como una fórmula necesitiva y, por tanto, tiene la forma LB:

De izquierda a derecha tenemos un único caso:

(α) $3 \in I_{\mathcal{M}M4}(B)$; gracias a la Hipótesis de inducción tenemos $F \notin I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y $T \in I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y por la cláusula (I) de la Definición 3.5 se consigue $F \notin I_{\mathcal{M}BD}(LB)$ y $T \in I_{BD}(LB)$

De derecha a izquierda tenemos un único caso:

(α) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$; de acuerdo a la Hipótesis de inducción se consigue $3 \in I_{M4}(B)$ y según la cláusula (I).(b) de la Observación 3.7 obtenemos $3 \in I_{M4}(LB)$

(ii) A aparece como una fórmula posibilitiva y, por tanto, tiene la forma MB:

De izquierda a derecha tenemos tres casos distintos:

(α) $1 \in I_{\mathcal{M}M4}(B)$; desde la Hipótesis de inducción obtenemos $F \notin I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y $T \notin I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y por medio de la cláusula (II) de la Definición 3.5 se tiene $F \notin I_{\mathcal{M}BD}(MB)$ y $T \in I_{BD}(MB)$

(β) $2 \in I_{\mathcal{M}M4}(B)$; desde la Hipótesis de inducción obtenemos $F \in I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y $T \in I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y por medio de la cláusula (II) de la Definición 3.5 se tiene $F \notin I_{\mathcal{M}BD}(MB)$ y $T \in I_{BD}(MB)$

(γ) $3 \in I_{\mathcal{M}M4}(B)$; desde la Hipótesis de inducción obtenemos $F \notin I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y $T \in I_{\mathcal{M}BD}(B)$ y por medio de la cláusula (II) de la Definición 3.5 se tiene $F \notin I_{\mathcal{M}BD}(MB)$ y $T \in I_{BD}(MB)$

De derecha a izquierda tenemos tres casos distintos:

(α) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \notin I_{BD}(B)$; por la Hipótesis de inducción se tiene $1 \in I_{M4}(B)$ y gracias a la cláusula (II).(b) de la Observación 3.7 conseguimos $3 \in I_{M4}(MB)$

(α) $F \in I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$; por la Hipótesis de inducción se tiene $2 \in I_{M4}(B)$ y gracias a la cláusula (II).(b) de la Observación 3.7 conseguimos $3 \in I_{M4}(MB)$

(α) $F \notin I_{BD}(B)$ y $T \in I_{BD}(B)$; por la Hipótesis de inducción se tiene $3 \in I_{M4}(B)$ y gracia a la cláusula (II).(b) de la Observación 3.7 conseguimos $3 \in I_{M4}(MB)$

■

Definición 3.10 ($\mathcal{M}$M4-Interpretación correspondiente a una $\mathcal{M}$BD-interpretación):
Sea $I_{\mathcal{M}BD}$ una $\mathcal{M}$BD-interpretación. Entonces, definimos una $\mathcal{M}$M4-interpretación $I_{\mathcal{M}M4}$ correspondiente:

Para cada variable proposicional p_i:

(V) $I_{\mathcal{M}BD}(p_i) = \{F\}$ y $I_{\mathcal{M}BD}(P_i) \neq \{T\}$ syss $I_{\mathcal{M}M4}(p_i) = 0$

(VI) $I_{\mathcal{M}BD}(p_i) = \varnothing$ syss $I_{\mathcal{M}M4}(p_i) = 1$

(VII) $I_{\mathcal{M}BD}(p_i) = \{T,\ F\}$ syss $I_{\mathcal{M}M4}(p_i) = 2$

(VIII) $I_{\mathcal{M}BD}(p_i) = \{T\}$ y $I_{\mathcal{M}BD}(P_i) \neq \{F\}$ syss $I_{\mathcal{M}M4}(p_i) = 3$

Lema 3.11 (Correspondencia de las $I_{\mathcal{M}BD}$ con respecto a las $I_{\mathcal{M}M4}$):
Dada la Definición 3.10, extendemos la equivalencia de las variables proposicionales a las fbf:

Para una fbf cualquiera$A$ se tiene:

(I) $I_{\mathcal{M}BD}(A) = \{F\}$ y $I_{\mathcal{M}BD}(A) \neq \{T\}$ syss $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 0$

(II) $I_{\mathcal{M}BD}(A) = \varnothing$ syss $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 1$

(III) $I_{\mathcal{M}BD}(A) = \{T,\ F\}$ syss $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 2$

(IV) $I_{\mathcal{M}BD}(A) = \{T\}$ y $I_{\mathcal{M}BD}(A) \neq \{F\}$ syss $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 3$

Prueba:

A fin de probar la correspondencia de las $I_{\mathcal{M}M4}$ y las $I_{\mathcal{M}BD}$, hemos de demostrar la equivalencia en la valoración de las fbf con respecto a todos los valores de verdad. Para ello procederemos por inducción sobre k, la complejidad de la fórmula. Probaremos cada paso en los dos sentidos antes de proceder al siguiente. En este apartado probaremos únicamente las conectivas modales; para el resto pueden consultarse los Lemas 2.16 y 2.18:

(I) Para $k = 1$, A es una variable proposicional y se sigue automáticamente por la Definición 3.10

(II) Para $k = n$, donde $n \in \mathbb{N}$, asumimos la hipótesis de inducción

(III) Para $k = n + 1$ la prueba transcurre de manera semejante a la del apartado correspondiente del Lema 3.8

■

Teorema 3.12 (Equivalencia de las nociones de validez en $\mathcal{M}$M4): La $\mathcal{M}$BD-validez, desarrollada en la Definición 3.6, y la $\mathcal{M}$M4-validez, incluida en la Definición 3.4, son equivalentes

Prueba:
Suponemos $\vDash_{\mathcal{M}M4} A$, entonces tendremos que $\vDash_{\mathcal{M}BD} A$, ya que si sucediese que $\nvDash \mathcal{M}_{BD} A$, entonces habría una $\mathcal{M}$BD-interpretación $I_{\mathcal{M}BD}$ tal que $I_{\mathcal{M}BD}(A) \neq T$ y, por el Lema 3.9, $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 0$ ó 1, contradiciendo la hipótesis. En el sentido contrario se procedería de manera similar, aplicando el Lema 3.11 en sustitución del Lema 3.9. Para el caso de $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}BD} A$ es menester probar $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}M4} A$; para ello sea $I_{\mathcal{M}M4}$ una $\mathcal{M}$M4-interpretación tal que $I_{\mathcal{M}M4}(\Gamma) = 2$ ó 3 y hemos de probar que $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 2$ ó 3. Definimos la $\mathcal{M}$BD-interpretación correspondiente a la $I_{\mathcal{M}M4}$ que hemos definido con anterioridad, tal y como hicimos en la Definición 3.8. Por el Lema 3.9, para toda fbf A, $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 2$ ó 3 syss $I_{\mathcal{M}BD}(A) = T$. Dado que tenemos que $I_{\mathcal{M}M4}(\Gamma) = 2$ ó 3, necesariamente $I_{\mathcal{M}BD}(\Gamma) = T$ y desde aquí tenemos $I_{\mathcal{M}BD}(A) = T$, lo que por el Lema 3.9 nos ofrece el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 2$ ó 3. En el sentido contrario es probado de manera semejante utilizando el Lema 3.11 en sustitución del Lema 3.9.

■

1.2 Axiomatización de EF4-M

Una vez que hemos desarrollado las semánticas para este concepto de modalidad, podemos dar su axiomatización. Así, tomando como base el sistema EF4 definido con anterioridad e incluyendo la caracterización modal que hemos definido, EF4-M es:

A1. $A \to A$
A2. $A \wedge B \to .A / A \wedge B \to .B$
A3. $A \to .A \vee B / B \to .A \vee B$
A4. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to .A \to (B \wedge C)$
A5. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to .(A \vee B) \to C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \to .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \to B \to .(B \to C) \to (A \to C)$
A8. $A \to B \to .(C \to A) \to (C \to B)$
A9. $A \to \neg B \to .B \to \neg A$
A10. $\neg\neg A \to A$
A11. $A \to (A \to B) \to .A \to B$
A12. $[(A \to A) \wedge (B \to B)] \to C \to .C$

A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$
A14. $B \wedge \neg (A \to B) \to .\neg B$
A15. $\neg (A \to B) \to .A \vee \neg B$
A16. $LA \to A$
A17. $\neg LA \wedge A \to .\neg A$
A18. $\neg LA \vee A$
A19. $MA \wedge \neg A \to .A$
A20. $A \to MA$
A21. $\neg A \vee MA$
A22. $LA \wedge \neg LA \to .B$
A23. $MA \wedge \neg MA \to .B$
R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \to B\, y\, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A\, y\, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \to B)$

1.3 Sobre la interdefinición de los operadores modales

Como ya se mencionó en la breve introducción a esta tercera parte, aunque sería posible incluir alguna de las interdefiniciones modales habituales, a saber, $MA := \neg L \neg A$ y $LA := \neg M \neg A$, se ha preferido mantener ambos operadores como primitivos para diferenciarlo del segundo sistema modal. Adicionalmente merece la pena señalar que en caso de incluir las interdefiniciones tanto los axiomas que incluyen fórmulas necesitivas, como aquellos que incluyen fórmulas posibilitivas, serían fácilmente derivables los unos de los otros.

1.4 La sintaxis del sistema EF4-M

1.4.1 Tesis y la axiomatización de EF4-M

Como punto clave de la sintaxis de EF4-M es necesario probar que las tesis que se siguen de las cláusulas de los operadores modales, o bien están incluidas en la axiomatización, o son derivables de esta:

Teorema 3.13 (Tesis y la axiomatización de EF4-M): Las tesis características de la matriz $\mathcal{M}$M4 son recogidas por la axiomatización de EF4-M

Prueba:
Sean las siguientes tesis las características de las conectivas de la matriz $\mathcal{M}$M4, omitiendo las tesis de los operadores habituales ya probadas en el Teorema 2.21. Para fbf A y B:
TNE1. $LA \to A$
TNE2. $LA \wedge \neg A \to .A$
TNE3. $A \to .\neg A \vee LA$
TNE4. $\neg LA \wedge A \to \neg\, .\, A$
TNE5. $\neg A \to \neg LA$
TNE6. $\neg LA \vee A$

TNE7. $LA \wedge \neg LA \rightarrow .B$
TP1. $MA \wedge \neg A \rightarrow .A$
TP2. $A \rightarrow MA$
TP3. $\neg A \vee MA$
TP4. $\neg MA \rightarrow \neg A$
TP5. $MA \wedge \neg A \rightarrow .\neg A$
TP6. $\neg A \rightarrow .A \vee \neg MA$
TP7. $MA \wedge \neg MA \rightarrow .B$

Por último, pasamos a probarlas axiomáticamente:
TNE1. $LA \rightarrow A$

1. $LA \rightarrow A$	A16

TNE2. $LA \wedge \neg A \rightarrow .A$

1. $LA \rightarrow A$	A16
2. $LA \wedge \neg A \rightarrow .LA$	A2
3. $LA \wedge \neg A \rightarrow .A$	A7, 1, 2

TNE3. $A \rightarrow .\neg A \vee LA$

1. $\neg LA \wedge A \rightarrow .\neg A$	A17
2. $\neg\neg A \rightarrow .\neg (A \wedge \neg LA)$	Contraposición (II), 1
3. $A \rightarrow .\neg (A \wedge \neg LA)$	Doble Negación (II), 2
4. $A \rightarrow .\neg A \vee \neg\neg LA$	De Morgan (V), 3
5. $A \rightarrow .\neg A \vee LA$	A10, 4

TNE4. $\neg LA \wedge A \rightarrow \neg . A$

1. $\neg LA \wedge A \rightarrow \neg . A$	A17

TNE5. $\neg A \rightarrow \neg LA$

1. $LA \rightarrow A$	A16
2. $\neg A \rightarrow \neg LA$	Contraposición (II), 1

TNE6. $\neg LA \vee A$

1. $\neg LA \vee A$	A18

TNE7. $LA \wedge \neg LA \rightarrow .B$

1. $LA \wedge \neg LA \rightarrow .B$	A22

TP1. $MA \wedge \neg A \rightarrow .A$

1. $MA \wedge \neg A \to .A$ A19

TP2. $A \to MA$

1. $A \to MA$ A20

TP3. $\neg A \vee MA$

1. $\neg A \vee MA$ A21

TP4. $\neg MA \to \neg A$

1. $A \to MA$	A20
2. $\neg MA \to \neg A$	Contraposición (II), 1

TP5. $MA \wedge \neg A \to .\neg A$

1. $MA \wedge \neg A \to .\neg A$ A2

TP6. $\neg A \to .A \vee \neg MA$

1. $MA \wedge \neg A \to .A$	A19
2. $\neg A \to .\neg (MA \wedge \neg A)$	Contraposición (II), 1
3. $\neg A \to .\neg MA \vee \neg\neg A$	De Morgan (V)
4. $\neg A \to .A \vee \neg MA$	A10, 3

TP7. $MA \wedge \neg MA \to .B$

1. $MA \wedge \neg MA \to .B$ A23

■

Teorema 3.14 (EF4-M es una expansión de EF4): El sistema EF4-M que acabamos de definir es una expansión modal del sistema EF4

Prueba:
Dado que los axiomas A1-A15 y las reglas R1-R3 de EF4-M se encuentran en la axiomatización de EF4, podemos asegurar que EF4$\subseteq$EF4-M. Adicionalmente los nuevos axiomas, A16-A23, suponen una ampliación $\mathfrak{L}'$ del lenguaje proposicional $\mathfrak{L}$ de EF4 en un sentido modal, ya que estos son los operadores añadidos; adicionalmente, gracias a la Proposición 3.2 podemos asegurar que nos encontramos ante una expansión genuina, y no una mera expansión definicional. Por tanto, podemos concluir que EF4$\subset$EF4-M y, en consecuencia, que EF4-M es una expansión modal de EF4.

1.5 Prueba de corrección de EF4-M

Teorema 3.15 (Corrección de EF4-M): Para un conjunto de fbf cualesquiera Γ, y una fbf cualquiera A, si $\Gamma \vdash_{EF4-M} A$, entonces $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}M4} A$ y, en consecuencia, $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}BD} A$

Prueba:

Dado que hemos probado la corrección fuerte de EF4 en el Corolario 2.45, para obtener la corrección fuerte de EF4-M, bastará con mostrar que los nuevos axiomas son correctos. Para evitar la repetición innecesaria, probaremos únicamente dos de ellos, uno para cada operador, y el resto quedará para el lector que podrá comprobarlos fácilmente gracias a [González, 2012]

A18. $\neg LA \wedge A \rightarrow .\neg A$:

Para $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 0$

Por la Definición 3.3 y la Observación 3.7, podemos concluir que $I_{\mathcal{M}M4}(\neg LA \wedge A) = 0$ y $I_{\mathcal{M}M4}(\neg A) = 3$, lo que, de nuevo, por la Definición 3.3 y la Observación 3.7, nos ofrece el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(\neg LA \wedge A \rightarrow .\neg A) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 3.12, podemos concluir que $I_{\mathcal{M}BD}(MA \wedge \neg A \rightarrow .A) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 1$

Por la Definición 3.3 y la Observación 3.7, podemos concluir que $I_{\mathcal{M}M4}(\neg LA \wedge A) = 1$ y $I_{\mathcal{M}M4}(\neg A) = 1$, lo que, de nuevo, por la Definición 3.3 y la Observación 3.7, nos ofrece el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(\neg LA \wedge A \rightarrow .\neg A) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 3.12, podemos concluir que $I_{\mathcal{M}BD}(MA \wedge \neg A \rightarrow .A) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 2$

Por la Definición 3.3 y la Observación 3.7, podemos concluir que $I_{\mathcal{M}M4}(\neg LA \wedge A) = 2$ y $I_{\mathcal{M}M4}(\neg A) = 2$, lo que, de nuevo, por la Definición 3.3 y la Observación 3.7, nos ofrece el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(\neg LA \wedge A \rightarrow .\neg A) = 2$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 3.12, podemos concluir que $I_{\mathcal{M}BD}(MA \wedge \neg A \rightarrow .A) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 3$

Por la Definición 3.3 y la Observación 3.7, podemos concluir que $I_{\mathcal{M}M4}(\neg LA \wedge A) = 0$ y $I_{\mathcal{M}M4}(\neg A) = 0$, lo que, de nuevo, por la Definición 3.3 y la Observación 3.7, nos ofrece el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(\neg LA \wedge A \rightarrow .\neg A) = 3$. Gracias a la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 3.12, podemos concluir que $I_{\mathcal{M}BD}(MA \wedge \neg A \rightarrow .A) = T$, verificando así el axioma.

A19. $MA \wedge \neg A \rightarrow .A$:

Para $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 0$

Por medio de la Definición 3.3 y la Observación 3.7, se puede obtener $I_{\mathcal{M}M4}(MA \wedge \neg A) = 0$ y $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 0$, lo que, de nuevo, gracias a la Definición 3.3 y la Observación 3.7, nos brinda el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(MA \wedge \neg A \rightarrow .A) = 3$. Según la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 3.12, tenemos que que $I_{\mathcal{M}BD}(MA \wedge \neg A \rightarrow .A) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 1$

Por medio de la Definición 3.3 y la Observación 3.7, se puede obtener$I_{\mathcal{M}M4}(MA \wedge \neg A) = 1$ y $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 1$, lo que, de nuevo, gracias a la Definición 3.3 y la Observación 3.7, nos brinda el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(MA \wedge \neg A \to .A) = 3$. Según la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 3.12, tenemos que que $I_{\mathcal{M}BD}(MA \wedge \neg A \to .A) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 2$

Por medio de la Definición 3.3 y la Observación 3.7, se puede obtener $I_{\mathcal{M}M4}(MA \wedge \neg A) = 2$ y $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 2$, lo que, de nuevo, gracias a la Definición 3.3 y la Observación 3.7, nos brinda el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(MA \wedge \neg A \to .A) = 2$. Según la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 3.12, tenemos que que $I_{\mathcal{M}BD}(MA \wedge \neg A \to .A) = T$, verificando así el axioma.

Para $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 3$

Por medio de la Definición 3.3 y la Observación 3.7, se puede obtener$I_{\mathcal{M}M4}(MA \wedge \neg A) = 0$ y $I_{\mathcal{M}M4}(A) = 3$, lo que, de nuevo, gracias a la Definición 3.3 y la Observación 3.7, nos brinda el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(MA \wedge \neg A \to .A) = 3$.Según la equivalencia de los conceptos de validez expresada en el Teorema 3.12, tenemos que que $I_{\mathcal{M}BD}(MA \wedge \neg A \to .A) = T$, verificando así el axioma.

$\blacksquare$

1.6 Completud de EF4-M

A la hora de probar la completud de FDF4, hemos expuesto los conceptos básicos y los lemas necesarios no para el sistema en si, sino para extensiones, expansiones, y extensiones y expansiones similares. Ello nos permitirá probar la completud de EF4-M de manera mucho más sencilla. En particular, asumiremos los conceptos de derivabilidad y derivabilidad disyuntiva de las Definiciones 2.3 y 2.4. Haremos uso de los Lemas 2.37 y 2.38, lemas de extensión y primacía respectivamente, y adicionalmente nos apoyaremos en la Definición 2.23 donde se desarrollan las EFDF4-teorías. Cabe señalar también que utilizaremos el concepto anejo de conjunto de consecuencias de un conjunto dado, expresado en la Definición 2.39 y la consiguiente Observación 2.40, así como el Teorema 2.33 que se ve probado gracias a los Lemas 2.26 a 2.28. En un primer término habremos de probar el siguiente lema en referencia a los nuevos operadores y su comportamiento en las teorías:

Lema 3.16 (Los operadores de Necesidad y Posibilidad en teorías a-consistentes, normales y primas): Sea a una teoría a-consistente, normal y prima, y A una fbf. Entonces se cumplen las siguientes cláusulas:

(I).(a) $LA \in a$ syss $A \in a$ y $\neg A \notin a$

(I).(b) $\neg LA \in a$ syss $\neg A \in a$ ó $A \notin a$

(II).(a) $MA \in a$ syss $A \in a$ ó $\neg A \notin a$

(II).(b) $\neg MA \in a$ syss $\neg A \in a$ y $A \notin a$

Prueba:

(I) Hemos de probar las dos instancias de la primera cláusula en los dos sentidos; comenzamos de izquierda a derecha:

(a) Suponemos $LA \in a$ como hipótesis y por A16 obtenemos $A \in a$. Suponemos ahora por reductio que $\neg A \in a$ y sea B una fbf cualquiera. Por Contraposición (II) y A16, $LA \to A$, tenemos $\neg LA \in a$, y desde aquí, $LA \wedge \neg LA \in a$. En última instancia, por A22, $LA \wedge \neg LA \to .B$, obtenemos $B \in a$, contradiciendo la a-consistencia de a

(b) Partimos de $\neg LA \in a$ como hipótesis inicial y de $\neg A \notin a$ y $A \in a$ como hipótesis de reductio. Por el teorema TN3, $A \to .\neg A \vee LA$, obtenemos $LA \in a$, y desde aquí, siendo B una fbf cualquiera, por el teorema TN7, $LA \wedge \neg LA \to .B$, obtenemos una contradicción con la a-consistencia de a

Proseguimos la prueba de derecha a izquierda:

(a) La hipótesis inicial es $A \in a$ y $\neg A \notin a$. Por el teorema TN3, $A \to .\neg A \vee LA$, obtenemos el resultado pretendido: $LA \in a$

(b) Como hipótesis inicial tenemos $\neg A \in a$ ó $A \notin a$. Desde el primer término, y gracias al teorema TN5, $\neg A \to .\neg LA$, obtenemos $\neg LA \in a$ rápidamente. Desde el segundo término, por A18, $\neg LA \vee A$, y, dado que a es prima y normal, tenemos también $\neg LA \in a$

(II) Probamos ahora las dos instancias de la segunda cláusula en los dos sentidos. De nuevo comenzaremos de izquierda a derecha:

(a) Partimos de $MA \in a$ y tenemos también que $A \notin a$ y $\neg A \in a$ como hipótesis de reductio. Por A19, $MA \wedge \neg A \to .A$, tenemos $A \in a$, lo que genera una contradicción.

(b) Teniendo $\neg MA \in a$ como hipótesis inicial. Obtenemos $\neg A \in a$ por el teorema TP4, $\neg MA \to .\neg A$. Desde aquí suponemos $A \in a$ por reductio y gracias a A20, $A \to MA$, tenemos $MA \in a$. En último término, siendo B una fbf cualquiera, por A23, $MA \wedge \neg MA \to .B$, tenemos $B \in a$, lo que contradice la a-consistencia de a

Por último probamos de derecha a izquierda:

(a) Suponiendo $A \in a$ ó $\neg A \notin a$, primero por A20, $A \to MA$, tenemos $MA \in a$, y después, gracias a A21 y que a es prima, tenemos $MA \in a$

(b) Siendo $\neg A \in a$ y $A \notin a$ las hipótesis iniciales, gracias al teorema TP6, $\neg A \to .A \vee \neg MA$, obtenemos $\neg MA \in a$

■

Una vez probado el Lema 3.16 procedemos a establecer las siguientes definiciones básicas:

Definición 3.17 ($\mathcal{M}\tau$-interpretación): Una $\mathcal{M}\tau$-interpretación es una función de $\mathfrak{F}$ en K^{4c} definida como sigue:

(I) $F \in I_{\mathcal{M}\tau}(p_i)$ syss $\neg p_i \in \mathcal{M}\tau$

(II) $T \in I_{\mathcal{M}\tau}(p_i)$ syss $p_i \in \mathcal{M}\tau$

Donde p_i es una variable proposicional cualquiera y $\mathcal{M}\tau$ una EF4-M-teoría prima, normal y a-consistente.

De manera adicional, para cualquier $A \in \mathfrak{F}$ una $\mathcal{M}\tau$-interpretación asigna un elemento de K^{4c}de acuerdo a las cláusulas recogidas en la Definición 3.5

Definición 3.18 (Modelo Canónico para la $\mathcal{M}$BD-semántica): Un modelo canónico, basado en la $\mathcal{M}$BD-semántica, es una estructura del tipo $\left(K^{4c},\, I^{c}_{\mathcal{M}\tau}\right)$ donde K^{4c} es el conjunto equivalente a K^{4}_{BD} de la Definición 2.11, $I^{c}_{\mathcal{M}\tau}$ es una $\mathcal{M}\tau$-interpretación tal y como se ha expuesto en la Definición 3.17.

Definición 3.19 (La relación canónica $\vDash_{\mathcal{M}\tau}$): Sea M un modelo canónico, la relación canónica $\vDash_{\mathcal{M}\tau}$ se define para cualquier conjunto de fbf Γ y fbf A, $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}\tau} A$ syss $T \in I_{\mathcal{M}\tau}(A)$, siempre que $T \in I_{\mathcal{M}\tau}(\Gamma)$. En particular, $\vDash_{\mathcal{M}\tau} A$, A es válida en un modelo canónico, syss $T \in I_{\mathcal{M}\tau}(A)$

Teorema 3.20 (El modelo canónico es un $\mathcal{M}$BD-modelo): El modelo canónico dado en la Definición 3.18 es un $\mathcal{M}$BD-modelo

Prueba:
Resulta evidente por las Definiciones 3.5 y 3.18. El modelo canónico es una instancia particular de una estructura general como son los $\mathcal{M}$BD-modelos
■

Por último extenderemos las cláusulas de la Definición 3.17 desde las variables proposicionales a las fbf:

Teorema 3.21 (Extensión de las cláusulas a las fbf en las $\mathcal{M}\tau$-interpretaciones): Sea $\mathcal{M}\tau$ la EF4-M-teoría prima, normal y a-consistente de la Definición 3.17. Entonces, para toda fbf A:
(I) $F \in I_{\mathcal{M}\tau}(A)$ *syss* $\neg A \in \mathcal{M}\tau$
(II) $T \in I_{\mathcal{M}\tau}(A)$ *syss* $A \in \mathcal{M}\tau$

Prueba:
La prueba se desarrolla por inducción sobre k, la longitud de la fórmula. Sean B y C fbf cualesquiera:

(I) Para $k = 1$; A es una variable proposicional y es probado de manera automática por la Definición 3.17

(II) Para $k \leq n$; donde $n \in \mathbb{N}$, asumimos la hipótesis de inducción.

(III) Para $k = n + 1$; dado que la prueba es una extensión de la del Teorema 2.30 nos referiremos a esta para los casos correspondientes a la Conjunción, la Disyunción, la Negación y el Condicional. Por tanto, aquí trataremos únicamente los casos correspondientes a las fórmulas relacionadas con el operador de Necesidad y el operador de Posibilidad. Así, tendremos únicamente dos subcasos:

(a) A es del tipo LB:

De izquierda a derecha:

(i) $F \in I_{\mathcal{M}\tau}(LB)$; por la Definición 3.5, cláusula (I).(a), se sigue que $F \in I_{\mathcal{M}\tau}(B)$ ó $T \notin I_{\mathcal{M}\tau}(B)$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $\neg B \in \mathcal{M}\tau$ ó $B \notin \mathcal{M}\tau$. En último lugar, por el Lema 3.16, cláusula (I).(b), podemos concluir $\neg LB \in \mathcal{M}\tau$

(ii) $T \in I_{\mathcal{M}\tau}(LB)$; por la Definición 3.5, cláusula (I).(b), se sigue que $T \in I_{\mathcal{M}\tau}(B)$ y $F \notin I_{\mathcal{M}\tau}(B)$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $B \in \mathcal{M}\tau$ y $\neg B \notin \mathcal{M}\tau$. . En último lugar, por el Lema 3.16, cláusula (I).(a), podemos concluir $LB \in \mathcal{M}\tau$

De derecha a izquierda:

(iii) $\neg LB \in \mathcal{M}\tau$; por el Lema 3.16, cláusula (I).(b), se sigue que $\neg B \in \mathcal{M}\tau$ ó $B \notin \mathcal{M}\tau$ y, adicionalmente ,por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $F \in I_{\mathcal{M}\tau}(B)$ ó $T \notin I_{\mathcal{M}\tau}(C)$. En último lugar, por la Definición 3.5, cláusula (I).(a) tenemos $F \in I_{\mathcal{M}\tau}(LB)$

(iv) $LB \in \mathcal{M}\tau$; por el Lema 3.16, cláusula (I).(a), se sigue que $B \in \mathcal{M}\tau$ y $\neg B \notin \mathcal{M}\tau$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $T \in I_{\mathcal{M}\tau}(B)$ y $F \notin I_{\mathcal{M}\tau}(B)$. En último lugar, por la Definición 3.5, cláusula (I).(b) tenemos $T \in I_{\tau}(LB)$

(b) A es del tipo MB:

(i) $F \in I_{\mathcal{M}\tau}(MB)$; por la Definición 3.5, cláusula (II).(a), se sigue que $F \in I_{\mathcal{M}\tau}(B)$ y $T \notin I_{\mathcal{M}\tau}(B)$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $\neg B \in \mathcal{M}\tau$ y $B \notin \mathcal{M}\tau$. En último lugar, por el Lema 3.16, cláusula (II).(b), podemos concluir $\neg MB \in \mathcal{M}\tau$

(ii) $T \in I_{\mathcal{M}\tau}(MB)$; por la Definición 3.5, cláusula (II).(b), se sigue que $T \in I_{\mathcal{M}\tau}(B)$ ó $F \notin I_{\mathcal{M}\tau}(B)$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $B \in \mathcal{M}\tau$ ó $\neg B \notin \mathcal{M}\tau$. . En último lugar, por el Lema 3.16, cláusula (II).(a), podemos concluir $MB \in \mathcal{M}\tau$

De derecha a izquierda:

(iii) $\neg MB \in \mathcal{M}\tau$; por el Lema 3.16, cláusula (II).(b), se sigue que $\neg B \in \mathcal{M}\tau$ y $B \notin \mathcal{M}\tau$ y, adicionalmente ,por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $F \in I_{\mathcal{M}\tau}(B)$ y $T \notin I_{\mathcal{M}\tau}(C)$. En último lugar, por la Definición 3.5, cláusula (II).(a) tenemos $F \in I_{\mathcal{M}\tau}(MB)$

(iv) $MB \in \mathcal{M}\tau$; por el Lema 3.16, cláusula (II).(a), se sigue que $B \in \mathcal{M}\tau$ ó $\neg B \notin \mathcal{M}\tau$, posteriormente, por la Hipótesis de Inducción podemos concluir que $T \in I_{\mathcal{M}\tau}(B)$ ó $F \notin I_{\mathcal{M}\tau}(B)$. En último lugar, por la Definición 3.5, cláusula (II).(b) tenemos $T \in I_{\tau}(MB)$

1.6.1 Teorema de completud para EF4-M

Teorema 3.22 (Teorema de completud para EF4-M): Para cualquier fbf de EF4-M A, si $\Gamma \models_{BD} A$ entonces $\Gamma \vdash_{EF4-M} A$

Prueba:
Sea Γ un conjunto de fbf cualquiera y A una fbf cualquiera; suponemos que $\Gamma \nvdash_{EF4-M} A$ y desde aquí probaremos que $\Gamma \nvDash_{BD} A$. Dada la hipótesis tenemos que $A \notin Cn\Gamma[EF4-M]$ y, por tanto, $Cn\Gamma[EF4-M] \nvdash^{d}_{EF4-M} A$, ya que si no tendríamos que $B_1 \wedge ... \wedge B_n \vdash_{EF4-M} A$ para fbf tales que $B_1 \wedge ... \wedge B_n \in Cn\Gamma[EF4-M]$, dando como resultado que A se encontraría en $Cn\Gamma[EF4-M]$. Por el Lema 2.37, el Lema de extensión para expansiones similares de FDF4, y dado que EF4-M es una expansión similar a FDF4, existe un conjunto maximal Γ' tal que $Cn\Gamma[EF4-M] \subseteq \Gamma'$ y, además, $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y $A \notin \Gamma'$. Por el Lema 2.38 Γ'es una teoría prima, una teoría normal por la Observación 2.40, y además, una teoría a-consistente por el hecho de que $A \notin \Gamma'$. Por tanto, se generará una $\mathcal{M}\tau$-interpretación tal que $T \in I_{\mathcal{M}\tau}(\Gamma)$ pero $T \notin I_{\mathcal{M}\tau}(A)$. De manera adicional, sabríamos que el modelo canónico desarrollado en la Definición 3.18 es, de hecho, un modelo por el Teorema 3.20 y, en última instancia, tendríamos que $\Gamma \nvDash_{\mathcal{M}\tau} A$ por la Definición 3.18 y, desde aquí $\Gamma \nvDash_{BD} A$ por la Definición 3.4 y el Teorema 3.20.
■

Corolario 3.23 (El sistema EF4-M es una axiomatización de la matriz $\mathcal{M}$M4): El sistema EF4-M que hemos definido es una axiomatización de la matriz $\mathcal{M}$M4 que hemos desarrollado en la Definición 3.1

Prueba:
Dado que, para EF4-M, hemos probado corrección y completud con respecto de la $\mathcal{M}$BD-semántica, podemos concluir, gracias a la equivalencia de la los conceptos de validez, probada en el Teorema 3.12, que el sistema EF4-M es una axiomatización de la matriz $\mathcal{M}$M4.

1.7 Sobre la modalidad de EF4-M

Hasta este momento hemos dado una explicación en profundidad de la técnica correspondiente a la modalidad del sistema EF4-M. Para ello hemos explicado cómo surgen los operadores modales, por qué rechazamos las interdefiniciones y hemos obtenido importantes resultados como corrección fuerte y completud fuerte. Sin embargo, esto nos deja con un sistema construido de manera aislada al resto de lógicas modales. Es por ello por lo que debemos ahora, centrarnos en especificar en qué lugar queda EF4-M con respecto a los sistemas modales más clásicos. Aparentemente EF4-M se constituye como un sistema distinto de K, T, D, S4 ó S5, puesto que, aunque hay tesis de estos sistemas se encuentran dentro de EF4-M, existen una serie de ellas que se encuentran fuera. Pasaremos a desgranar la cuestión en detalle a continuación. Con respecto a K, que podríamos denominar como el sistema más débil de cuantos vamos a tratar aquí, gran parte de sus teoremas se encuentran en EF4-M, como por ejemplo $L(A \wedge B) \rightarrow .LA \wedge LB$, ó $L(A \vee B) \rightarrow .LA \vee MB$. La principal diferencia entre EF4-M y K radica en las reglas $A \rightarrow B \Rightarrow LA \rightarrow LB$ y $A \rightarrow B \Rightarrow MA \rightarrow MB$, que en EF4-M se ven verificadas como teoremas, no como reglas. El otro punto de discordancia entre K y EF4-M reside en el teorema $LA \rightarrow MB \rightarrow .M(A \rightarrow B)$, que no se verifica en EF4-M, aunque si en el sentido contrario: $M(A \rightarrow B) \rightarrow .LA \rightarrow MB$. Con respecto a T nos encontramos con un caso similar; los teoremas $LA \rightarrow A$ y $A \rightarrow MA$ son verificados por EF4-M, pero por el contrario, $M(A \rightarrow LA)$, no es válido.

Como casos opuestos nos encontramos con que los teoremas característicos de D, $LA \rightarrow MA$ y $M(A \rightarrow A)$ si son verificados. De la misma manera, todos los teoremas principales de S4, como $LA \rightarrow LLA$, $MMA \rightarrow MA$, $MLMA \rightarrow MA$ ó $MLA \rightarrow MLMLA$ son verificados; en particular, algunos de ellos se verifican en ambos sentidos tal y como ocurre en S4. Lo mismo ocurre para los teoremas de S5: también son verificados y, no sólo eso, sino que $MA \rightarrow LMA$, y $MLA \rightarrow LA$ lo son en ambos sentidos. Por último, es importante señalar que la regla de Necesitación, $A \Rightarrow LA$ no se encuentra dentro de EF4-M.

2 Segunda modalidad: EF4-Ł

Para la implementación de la segunda modalidad haremos uso de la extensión definicional clásica para el operador de Necesidad que se incluyó en [Anderson y Belnap, 1975], asumiendo la interdefinición habitual para el operador de Posibilidad. Sin embargo, ocurre que esta forma de definir la modalidad coincide aquí con las extensiones definicionales que Tarski diese a Łukasiewicz para definir sus operadores modales en su lógicas n-valuadas e infinito-valuada.

Ha de resultar obvio que, si los axiomas de estas dos modalidades se añaden en base a sus extensiones definicionales, ya sean las de Tarksi o las de Anderson y Belnap, se producirá el caso en el que no resultarán independientes de los axiomas originales de EF4. Es por ello que se pueden dar varias axiomatizaciones justificadas de numerosas maneras. Así, en vez de dar una única axiomatización, para esta modalidad se darán cuatro distintas. Es importante señalar también que, a la hora de construir estas axiomatizaciones, los axiomas añadidos son aquellos característicos de las definiciones de los operadores modales y que serían necesarios de querer obtener un resultado de completud de manera similar a como se ha obtenido para EF4-M.

Sea como fuere, la implementación de esta modalidad requerirá de las siguientes definiciones:

Definición 3.24 (La matriz ŁM4): La matriz ŁM4 se define como una expansión modal de la matriz M4 dada en la Definición 1.2, donde el conjunto f es modificado como sigue: $f = f_{\wedge M4}$, $f_{\vee M4}$, $f_{\rightarrow M4}$, $f_{\neg M4}$, f_{LM4} y f_{MM4}. Para los elementos de f ya desarrollados nos remitiremos a la Definición 1.2. Los nuevos elementos son definidos como sigue:

$LA = 3$ syss $A = 3$; $LA = 2$ syss $A = 2$; $LA = 0$ en el resto de los casos
$MA = 0$ syss $A = 0$; $MA = 2$ syss $A = 2$; $MA = 3$ en el resto de los casos

Esto puede ser resumido en las siguientes tablas:

	LA
0	0
1	0
2	2
3	3

	MA
0	0
1	3
2	2
3	3

Adicionalmente, por I_{LM4} nos referiremos a una ŁM4-interpretación construida sobre la matriz ŁM4, definida de manera similar a los casos anteriores.

Definición 3.25 (Extensiones definicionales e interdefiniciones de L y M): Para una fbf cualquiera A, las extensiones definicionales de L y M son:
(I) $LA =_{df} \neg (A \to \neg A)$
(II) $LA =_{df} A \to A \to .A$
(III) $MA =_{df} \neg A \to A$
Las interdefiniciones son:
(IV) $LA =_{df} \neg M \neg A$
(V) $MA =_{df} \neg L \neg A$

Observación 3.26 (Definibilidad de f_{LM4} y f_{MM4}): Las funciones f_{LM4} y f_{MM4} son definibles desde las funciones $f_{\to M4}$ y $f_{\neg M4}$ en la matriz ŁM4 y, por tanto, también en la matriz M4

Prueba:
Se sigue de manera automática al comprobar los resultados de las extensiones definicionales introducidas en la Definición 3.25
■

Está última Observación 3.26 resulta obvia y podría, por tanto, verse como prescindible. Pero dado que para EF4-M hemos probado la no definibilidad de las funciones modales, resulta justo incluir aquí la definibilidad de estas. Esto se debe al hecho de mantener una estructura lo más similar posible para facilitar la comparación y el estudio de ambos sistemas, EF4-M y EF4-Ł.

2.1 EF4-Ł (I)

Para la primera axiomatización modal, EF4-Ł (I), tomamos EF4 como punto de partida, al cual hemos de añadir todos los axiomas y reglas modales, derivados de los operadores que hemos introducido en la Definición 3.24, tanto los de Posibilidad como los de Necesidad. Así la axiomatización de EF4-Ł (I) quedaría como sigue:
A1. $A \to A$
A2. $A \wedge B \to .A / A \wedge B \to .B$

A3. $A \rightarrow .A \vee B / B \rightarrow .A \vee B$
A4. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow .A \rightarrow (B \wedge C)$
A5. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \rightarrow B \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
A8. $A \rightarrow B \rightarrow .(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$
A9. $A \rightarrow \neg B \rightarrow .B \rightarrow \neg A$
A10. $\neg\neg A \rightarrow A$
A11. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow .A \rightarrow B$
A12. $[(A \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow B)] \rightarrow C \rightarrow .C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)$
A14. $B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow .\neg B$
A15. $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B$
A16. $LA \rightarrow A$
A17. $\neg LA \wedge A \rightarrow .\neg A$
A18. $\neg LA \vee A$
A19. $MA \wedge \neg A \rightarrow .A$
A20. $A \rightarrow MA$
A21. $\neg A \vee MA$
R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \rightarrow B\, y\, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A\, y\, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \rightarrow B)$
R4. $A \Rightarrow LA$
R5. $\neg A \Rightarrow \neg MA$

2.1.1 Sobre la interdefinición de los operadores modales

Las diferentes axiomatizaciones de EF4-Ł, (I) - (IV), tal y como se ha dicho antes, resultan interesantes por la capacidad de adaptación a las cuestiones modales. Este primer sistema, EF4-Ł (I), resulta el más expresivo modalmente hablando gracias a la abundancia de conectivas. En él se han mantenido ambos operadores modales, Posibilidad y Necesidad, y se eliminan las posibles interdefiniciones para evitar su derivabilidad, al contrario de lo que ocurrirá en las restantes axiomatizaciones, (II) - (IV), donde se introducirán las interdefiniciones: en EF4-Ł (II) se introducirá la interdefinición correspondiente al operador de Posibilidad; en EF4-Ł (III) se introducirá la interdefinición correspondiente al operador de Necesidad; y en EF4-Ł (IV) se introducirán ambas extensiones definicionales.

2.1.2 La sintaxis de la axiomatización EF4-Ł (I)

Como único punto de la sintaxis de EF4-Ł (I) es necesario probar que las tesis modales inherentes a la Definición 3.24, o bien están incluidas en la axiomatización, o son derivables de esta:

Proposición 3.27 (Tesis y la axiomatización de EF4-Ł (I)): Las tesis inherentes a la Definición 3.24 pertenecen a la axiomatización de EF4-Ł (I)

Prueba:

Las tesis que se derivan de los postulados de los operadores modales son las siguientes:

TNE1. $LA \to A$
TNE2. $\neg LA \wedge A \to \neg \,\mathbf{.}\, A$
TNE3. $\neg A \to \neg LA$
TNE4. $\neg LA \vee A$
RNE1. $A \Rightarrow LA$
TP1. $MA \wedge \neg A \to \mathbf{.}A$
TP2. $A \to MA$
TP3. $\neg A \vee MA$
TP4. $\neg MA \to \neg A$
RP1. $\neg A \Rightarrow \neg MA$

Pasamos a probarlas axiomáticamente:

TNE1. $LA \to A$

1. $LA \to A$	A16

TNE2. $\neg LA \wedge A \to \neg \,\mathbf{.}\, A$

1. $\neg LA \wedge A \to \neg \,\mathbf{.}\, A$	A17

TNE3. $\neg A \to \neg LA$

1. $LA \to A$	A16
2. $\neg A \to \neg LA$	Contraposición (II), 1

TNE4. $\neg LA \vee A$

1. $\neg LA \vee A$	A18

RNE1. $A \Rightarrow LA$

1. A	Hipótesis
2. LA	R4, 1

TP1. $MA \wedge \neg A \to \mathbf{.}A$

1. $MA \wedge \neg A \to \mathbf{.}A$	A19

TP2. $A \to MA$

1. $A \to MA$ A20

TP3. $\neg A \vee MA$

1. $\neg A \vee MA$ A21

TP4. $\neg MA \to \neg A$

1. $A \to MA$ A20
2. $\neg MA \to \neg A$ Contraposición (II), 1

RP1. $\neg A \Rightarrow \neg MA$

1. $\neg A$ Hipótesis
2. $\neg MA$ R6, 1

■

2.2 EF4-Ł (II)

Para la axiomatización de EF4-Ł (II), es necesario partir de EF4, y añadir los axiomas correspondientes al operador de Necesidad inherentes a la Definición 3.24, quedando así la axiomatización de EF4-Ł (II):

A1. $A \to A$
A2. $A \wedge B \to .A/A \wedge B \to .B$
A3. $A \to .A \vee B/B \to .A \vee B$
A4. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to .A \to (B \wedge C)$
A5. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to .(A \vee B) \to C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \to .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \to B \to .(B \to C) \to (A \to C)$
A8. $A \to B \to .(C \to A) \to (C \to B)$
A9. $A \to \neg B \to .B \to \neg A$
A10. $\neg\neg A \to A$
A11. $A \to (A \to B) \to .A \to B$
A12. $[(A \to A) \wedge (B \to B)] \to C \to .C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$
A14. $B \wedge \neg (A \to B) \to .\neg B$
A15. $\neg (A \to B) \to .A \vee \neg B$
A16. $LA \to A$
A17. $\neg LA \wedge A \to .\neg A$
A18. $\neg LA \vee A$
R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \to B\, y\, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A\, y\, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \to B)$
R4. $A \Rightarrow LA$

2.2.1 Prueba de los axiomas eliminados en EF4-Ł (II)

Para completar el apartado correspondiente a EF4-Ł (II) probamos que los axiomas eliminados con respecto a EF4-Ł (I) se siguen de los restantes axiomas usando las interdefiniciones como apoyo; es decir, probaremos que la Posibilidad surge de la necesidad: o como sea: REDACTALO

Proposición 3.28 (Axiomas eliminados en EF4-Ł (II)): Los axiomas eliminados de la axiomatización de EF4-Ł (I) pertenecen a EF4-Ł (II)

Prueba:
A19. $MA \wedge \neg A \to .A$

1. $(\neg A \to A) \wedge \neg A \to .A$	Axioma Modus Ponens
2. $MA \wedge \neg A \to .A$	Definición 3.25.(III), 1

A20. $A \to MA$

1. $L\neg A \to .\neg A$	A16
2. $\neg\neg A \to \neg L\neg A$	Contraposición (II), 1
3. $A \to \neg L\neg A$	A10, 2
4. $A \to MA$	Definición 3.25.(V), 3

A21. $\neg A \vee MA$

1. $\neg L\neg A \vee \neg A$	A18
2. $MA \vee \neg A$	Definición 3.25.(V), 1

R5. $\neg A \Rightarrow \neg MA$

1. $\neg A$	Hipótesis
2. $L\neg A$	R4, 1
3. $\neg\neg L\neg A$	Doble Negación (II), 2
4. $\neg MA$	Definición 3.25.(V), 3

2.3 EF4-Ł (III)

Para la axiomatización de EF4-Ł (III) partimos, de nuevo, de EF4, y añadimos los axiomas correspondientes al operador de Posibilidad. Quedaría así la axiomatización de EF4-Ł (III):

A1. $A \to A$
A2. $A \wedge B \to .A/A \wedge B \to .B$
A3. $A \to .A \vee B/B \to .A \vee B$
A4. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to .A \to (B \wedge C)$
A5. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to .(A \vee B) \to C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \to .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A7. $A \to B \to \boldsymbol{.} (B \to C) \to (A \to C)$
A8. $A \to B \to \boldsymbol{.} (C \to A) \to (C \to B)$
A9. $A \to \neg B \to \boldsymbol{.} B \to \neg A$
A10. $\neg\neg A \to A$
A11. $A \to (A \to B) \to \boldsymbol{.} A \to B$
A12. $[(A \to A) \wedge (B \to B)] \to C \to \boldsymbol{.} C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$
A14. $B \wedge \neg (A \to B) \to \boldsymbol{.} \neg B$
A15. $\neg (A \to B) \to \boldsymbol{.} A \vee \neg B$
A16. $MA \wedge \neg A \to \boldsymbol{.} A$
A17. $A \to MA$
A18. $\neg A \vee MA$
R1. $A \, y \, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \to B \, y \, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A \, y \, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \to B)$
R4. $\neg A \Rightarrow \neg MA$

2.3.1 Prueba de los axiomas eliminados en EF4-Ł (III)

Para completar el apartado correspondiente a EF4-Ł (III) probamos que los axiomas eliminados respecto a EF4-Ł (I) se siguen de los restantes axiomas usando las interdefiniciones como apoyo:

Proposición 3.29 (Axiomas eliminados en EF4-Ł (III)): Los axiomas eliminados de la axiomatización de EF4-Ł (I) pertenecen a EF4-Ł (III)

Prueba:
A16. $LA \to A$

1. $\neg A \to M\neg A$	A17
2. $\neg M\neg A \to \neg\neg A$	Contraposición (II), 1
3. $\neg M\neg A \to A$	A10, 2
4. $LA \to A$	Definición 3.25.(IV), 3

A17. $\neg LA \wedge A \to \boldsymbol{.} \neg A$

1. $M\neg A \wedge \neg\neg A \to \boldsymbol{.} \neg A$	A16
2. $\neg\neg M\neg A \wedge A \to \boldsymbol{.} \neg A$	A10, Doble Negación (II), 1
3. $\neg LA \wedge A \to \boldsymbol{.} \neg A$	Definición 3.25.(IV), 2

A18. $\neg LA \vee A$

1. $\neg\neg A \vee M\neg A$	A18
2. $A \vee M\neg A$	A10, 1
3. $A \vee \neg LA$	Definición 3.25.(IV), 2

R4. $A \Rightarrow LA$

1. A	Hipótesis
2. $\neg\neg A$	Doble Negación (II), 1
3. $\neg M \neg A$	R4, 2
4. $\neg\neg L \neg\neg A$	Definición 3.25.(IV), 3
5. LA	A10, 4

2.4 EF4-Ł (IV)

Para la axiomatización de EF4-Ł (IV) consideramos ambos operadores modales, Necesidad y Posibilidad, como definibles, bien por interdefinición, bien por alguna de las extensiones definicionales que hemos expuesto con anterioridad. Por esto, y basándonos en la equivalencia de los sistemas que probaremos a continuación, la axiomatización de EF4-Ł (IV) es idéntica a la axiomatización de EF4:

A1. $A \rightarrow A$
A2. $A \wedge B \rightarrow .A / A \wedge B \rightarrow .B$
A3. $A \rightarrow .A \vee B / B \rightarrow .A \vee B$
A4. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow .A \rightarrow (B \wedge C)$
A5. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \rightarrow B \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
A8. $A \rightarrow B \rightarrow .(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$
A9. $A \rightarrow \neg B \rightarrow .B \rightarrow \neg A$
A10. $\neg\neg A \rightarrow A$
A11. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow .A \rightarrow B$
A12. $[(A \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow B)] \rightarrow C \rightarrow .C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)$
A14. $B \wedge \neg(A \rightarrow B) \rightarrow .\neg B$
A15. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B$
R1. $A \, y \, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \rightarrow B \, y \, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A \, y \, C \vee (A \rightarrow B) \Rightarrow C \vee B$
R4. $C \vee A \, y \, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg(A \rightarrow B)$

2.5 Equivalencia y propiedades de EF4-Ł

Proposición 3.30 (EF4-Ł es equivalente a EF4): Los sistemas EF4 y EF4-Ł son deductivamente equivalentes, es decir, para una fbf cualquiera A, $\vdash_{EF4} A$ syss $\vdash_{EF4-L} A$

Prueba:
De izquierda a derecha; $\vdash_{EF4} A \Rightarrow \vdash_{EF4-L} A$:

La axiomatización de EF4 resulta idéntica a la de EF4-Ł (IV), mientras que, con respecto a la axiomatización de EF4-Ł (I)-(III), difieren en los axiomas y reglas modales; sin embargo, puesto que estos, los axiomas y reglas modales, son definibles desde la matriz M4, tal y como se muestra en la Observación 3.26, el lenguaje proposicional $\mathfrak{L}$ de EF4 y el lenguaje proposicional $\mathfrak{L}'$ de EF4-Ł, son equivalentes. Así, dado que EF4 es completo tal y como se probó con anterioridad, necesariamente los axiomas que EF4-Ł posee y que no se incluyen en EF4, son derivables

De derecha a izquierda; $\vdash_{EF4-L} A \Rightarrow \vdash_{EF4} A$:

Resulta evidente puesto que la axiomatización de EF4 está incluida en su totalidad en la de EF4-Ł.

■

Observación 3.31 (Propiedades de EF4-Ł): EF4-Ł es un sistema correcto y completo en sentido fuerte, y es una axiomatización de la matriz ŁM4

Prueba:

Dado que EF4 es correcto y completo en sentido fuerte por el Teorema 2.43, y el Corolario 2.44, se sigue de manera automática por el Teorema 3.30

■

2.6 Sobre la modalidad de EF4-Ł

Al igual que hicimos al final de la sección correspondiente a la primera modalidad, EF4-M, nos vemos en la necesidad de incluir una reflexión sobre la situación de EF4-Ł con respecto a otros sistemas modales. No por ello debemos olvidar que ya hemos explicado con anterioridad cómo se desarrolla esta segunda modalidad, cuál es su origen y cómo se pueden obtener resultados de corrección fuerte y completud fuerte. Como hicimos en el apartado correspondiente a EF4-M compararemos las tesis pertenecientes a EF4-Ł con las de los sistemas K, T, D, S4 y S5.

En un primer término, con respecto a K, EF4-Ł verifica gran parte de sus teoremas, como $LA \wedge LB \rightarrow .L(A \wedge B)$, $M(A \vee B) \rightarrow .MA \vee MB$, en ambos sentidos. También las reglas $A \rightarrow B \Rightarrow LA \rightarrow LB$ y $A \rightarrow B \Rightarrow MA \rightarrow MB$, como ocurriese en EF4-M, son verificadas en su forma teoremática. Continuando con el paralelismo, $LA \rightarrow MB \rightarrow .M(A \rightarrow B)$ es verificado, pero en el sentido contrario, $M(A \rightarrow B) \rightarrow .LA \rightarrow MB$, no lo es. Pese a todo ello, la principal diferencia entre EF4-M y EF4-Ł con respecto a K, reside en el teorema $L(A \vee B) \rightarrow .LA \vee MB$, que EF4-Ł verifica únicamente como regla. Al igual que ocurriese con EF4-M para el sistema T, EF4-Ł verifica $LA \rightarrow A$ y $A \rightarrow MA$, pero no verifica $M(A \rightarrow LA)$.

Por otra parte, con respecto a los sistemas D, S4 y S5, ocurre lo mismo que ocurría en el caso de EF4-M: todos los teoremas principales de estos sistemas son verificados; incluso de manera habitual son verificados en ambos sentidos, como $LMA \rightarrow LMLMA$ y $LMLMA \rightarrow LMA$ de S4.

De esta manera, la situación de EF4-Ł es similar a la de EF4-M: son sistemas que incluyen gran parte de las tesis de los sistemas modales más básicos, K, T, D, S4 ó S5, pero la ausencia de alguna de ellas resulta en una diferenciación evidente entre EF4-Ł y EF4-M, y los sistemas habituales.

3 Eliminación de las Paradojas Modales en EF4-M y EF4-Ł

Teorema 3.32 (Las Paradojas Modales son eliminadas): Las paradojas modales fuertes tipo Łukasiewicz no son validadas en ninguno de los sistemas modales definidos, EF4-M y EF4-Ł

Prueba:
Probaremos que existe, al menos, una valoración para cada una de las paradojas modales dentro de los sistemas que hace que estas sean falsas.Sean p y q dos variables proposicionales cualesquiera:

Para EF4-M:
(I) $Mp \wedge Mq \rightarrow .M(p \wedge q)$
Para $I_{\mathcal{M}M4}(p) = 2$ y $I_{\mathcal{M}M4}(q) = 1$ obtenemos $I_{\mathcal{M}M4}(Mp \wedge Mq) = 3$ y $I_{\mathcal{M}M4}(M(p \wedge q)) = 0$, lo que conlleva el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(Mp \wedge Mq \rightarrow .M(p \wedge q)) = 0$, falsando la fórmula
(II) $L(p \vee q) \rightarrow .Lp \vee Lq$
Para $I_{M4}(p) = 2$ y $I_{\mathcal{M}M4}(q) = 1$ obtenemos $I_{\mathcal{M}M4}(L(p \vee q)) = 3$ y $I_{\mathcal{M}M4}(Lp \vee Lq) = 0$, lo que conlleva el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(L(p \vee q \rightarrow .Lp \vee Lq)) = 0$, falsando la fórmula
(III) $Lp \rightarrow .q \rightarrow Lq$
Para $I_{\mathcal{M}M4}(p) = 3$ y $I_{\mathcal{M}M4}(q) = 1$ obtenemos $I_{\mathcal{M}M4}(Lp) = 3$ y $I_{\mathcal{M}M4}(q \rightarrow Lq) = 0$, lo que conlleva el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(Lp \rightarrow .q \rightarrow Lq) = 0$, falsando la fórmula
(IV) $Lp \rightarrow .Mq \rightarrow q$
Para $I_{\mathcal{M}M4}(p) = 3$ y $I_{\mathcal{M}M4}(q) = 1$ obtenemos $I_{\mathcal{M}M4}(Lp) = 3$ y $I_{\mathcal{M}M4}(Mq \rightarrow q) = 0$, lo que conlleva el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(Lp \rightarrow .Mq \rightarrow q) = 0$, falsando la fórmula
(V) $p \rightarrow Lp$
Para $I_{\mathcal{M}M4}(p) = 2$ obtenemos $I_{\mathcal{M}M4}(p) = 2$ y $I_{\mathcal{M}M4}(Lp) = 0$, lo que conlleva el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(p \rightarrow Lp) = 0$, falsando la fórmula
(VI) $LMp \rightarrow p$
Para $I_{\mathcal{M}M4}(p) = 1$ obtenemos $I_{\mathcal{M}M4}(LMp) = 3$ y $I_{\mathcal{M}M4}(p) = 1$, lo que conlleva el resultado $I_{\mathcal{M}M4}(LMp \rightarrow p) = 0$, falsando la fórmula

Para EF4-Ł:
(I) $Mp \wedge Mq \rightarrow .M(p \wedge q)$
Para $I_{LM4}(p) = 2$ y $I_{LM4}(q) = 1$ obtenemos $I_{LM4}(Mp \wedge Mq) = 2$ y $I_{LM4}(M(p \wedge q)) = 0$, lo que conlleva el resultado $I_{LM4}(Mp \wedge Mq \rightarrow .M(p \wedge q)) = 0$, falsando la fórmula

(II) $L(p \vee q) \to .Lp \vee Lq$

Para $I_{LM4}(p) = 2$ y $I_{LM4}(q) = 1$ obtenemos $I_{LM4}(L(p \vee q)) = 3$ y $I_{LM4}(Lp \vee Lq) = 2$, lo que conlleva el resultado $I_{LM4}(L(p \vee q) \to .Lp \vee Lq) = 0$, falsando la fórmula

(III) $Lp \to .q \to Lq$

Para $I_{LM4}(p) = 2$ y $I_{LM4}(q) = 1$ obtenemos $I_{LM4}(Lp) = 2$ y $I_{LM4}(q \to Lq) = 0$, lo que conlleva el resultado $I_{LM4}(Lp \to .q \to Lq) = 0$, falsando la fórmula

(IV) $Lp \to .Mq \to q$

Para $I_{LM4}(p) = 2$ y $I_{LM4}(q) = 1$ obtenemos $I_{LM4}(Lp) = 2$ y $I_{LM4}(Mq \to q) = 0$, lo que conlleva el resultado $I_{LM4}(Lp \to .Mq \to q) = 0$, falsando la fórmula

(V) $p \to Lp$

Para $I_{LM4}(p) = 1$ obtenemos $I_{LM4}(p) = 1$ y $I_{LM4}(Lp) = 0$, lo que conlleva el resultado $I_{LM4}(p \to Lp) = 0$, falsando la fórmula

(VI) $LMp \to p$

Para $I_{LM4}(p) = 1$ obtenemos $I_{LM4}(LMp) = 3$ y $I_{LM4}(p) = 1$, lo que conlleva el resultado $I_{LM4}(LMp \to p) = 0$, falsando la fórmula

■

Parte IV
Semánticas relacionales

En esta cuarta y última parte definiremos dos semánticas relacionales diferentes para el sistema EF4. En la primera desarrollaremos la semántica relacional ternaria de modelo reducido desarrollada por Routley y Meyer, para la que daremos un resultado de corrección fuerte y otro de completud fuerte, incluyendo los postulados semánticos correspondientes a los axiomas y regla característicos de la matriz M4. En el segundo caso daremos una semántica relacional ternaria basada en 2 set-up, para la que, de nuevo, daremos resultados de corrección fuerte y completud fuerte. Adicionalmente probaremos que estos resultados también se pueden obtener para FDF4 a partir de estas semánticas. En último término, estudiaremos la relación que existe entre la semántica basada en el modelo general reducido y la semántica basada en 2 set-up, probando que la segunda no es más que un caso particular de la primera.

1 Semántica relacional ternaria de modelo reducido para EF4

1.1 Modelo general

Las siguientes definiciones y lemas son los principales conceptos básicos de la semántica relacional ternaria de modelo reducido:

Definición 4.1 (EF4-modelo): Un EF4-modelo es la estructura $\langle O,\ K_{RM},\ ,R\ ,*\ \vDash_{RM}\rangle$, donde K_{RM} es un conjunto, O es un elemento de K_{RM}, R es una relación ternaria definida sobre K_{RM}, y $*$ es una operación en K. Todos los elementos están sometidos a las siguientes definiciones y postulados; para todo a, b, $c \in K_{RM}$:

D1.$a \leq b =_{df} ROab$

D2. $R^2abcd =_{df} (\exists x \in K_{RM})\,(Rabx$ y $Rxcd)$

D3. $a = b =_{df} a \leq b$ y $b \leq a$

P1. $a \leq a$

P2. Si $a \leq b$ y $Rbcd$, entonces $Racd$

P3. Si R^2abcd, entonces $(\exists x \in K_{RM})\,(Racx$ y $Rbxd)$

P4. $a = a**$

P5. Si $Rabc$, entonces $Rac*b*$

P6. Si R^2abcd, entonces $(\exists x \in K_{RM})\,(Rbcx$ y $Raxd)$

P7. Si $Rabc$, entonces R^2abbc

P8. $(\exists x \in Z)\,Raxa$ [Za syss para todo b, $c \in K_{RM}$, si $Rabc$, entonces $RObc$]

P9. Si $RObc$, entonces $b \leq O$ ó $O* \leq c$

P10. Si, $Ra*bc$, entonces $a* \leq c$ ó $a \leq c$

P11. Si, $Ra*bc$, entonces $b \leq a$ ó $a* \leq c$

P12. $RO*OO*$

Finalmente, $\vDash_{RM}$ es una relación de K_{RM} a $\mathfrak{F}$ tal que las siguientes cláusulas se satisfacen para toda variable proposicional p, fbf A y B, y a, $b \in K_{RM}$:

C1. Si ($a \leq b$ y $a \vDash_{RM} p$), entonces $b \vDash_{RM} p$

C2. $a \vDash_{RM} A \wedge B$ syss $a \vDash_{RM} A$ y $a \vDash_{RM} B$

C3. $a \vDash_{RM} A \vee B$ syss $a \vDash_{RM} A$ ó $a \vDash_{RM} B$

C4. $a \vDash_{RM} A \to B$ syss para todo b, $c \in K_{RM}$, si $Rabc$ y $b \vDash_{RM} A$, entonces $c \vDash_{RM} B$

C5. $a \vDash_{RM} \neg A$ syss $a* \nvDash_{RM} A$

Definición 4.2 (Verdad en un EF4-modelo): Una fbf A es verdadera en un EF4-modelo syss $O \vDash_{RM} A$ en ese modelo.

Definición 4.3 (EF4-validez): Una fbf A es EF4-válida, en símbolos $\vDash_{EF4-RM} A$, syss $O \vDash_{RM} A$ en todos los EF4-modelos.

Definición 4.4 (EF4-consecuencia semántica): Para cualquier conjunto de fbf Γ y fbf A: A es consecuencia semántica del conjunto Γ, en símbolos $\Gamma \vDash_{RM} A$, syss si $O \vDash_{RM} \Gamma$ ($O \vDash_{RM} \Gamma$ syss $O \vDash_{RM} B$ para toda $B \in \Gamma$), entonces $O \vDash_{RM} A$. Así, A es EF4-consecuencia semántica de Γ, en símbolos $\Gamma \vDash_{EF4-RM} A$, syss $\Gamma \vDash_{RM} A$ para todo EF4-modelo M.

Probamos a continuación dos lemas característicos de la lógicas de la relevancia, la Condición Hereditaria y el Lema de Vinculación, así como una proposición de utilidad como paso previo a dar una prueba de corrección:

Proposición 4.5 (Propiedad de la operación *): Para cualquier EF4-modelo M y una fbf A, $a* \vDash_{RM} \neg A$ syss $a \nvDash_{RM} A$

Prueba:
La prueba resulta inmediata por la Definición 4.1.C5 y el hecho de que $*$ sea una operación involutiva: $a* \vDash_{RM} \neg A$ syss $a** \nvDash_{RM} A$ syss $a \nvDash_{RM} A$. ■

Dada la relación intrínseca que existe entre esta Proposición 4.5 y la clausula C5 de la Definición 4.1, y en aras de facilitar tanto el trabajo como la lectura, utilizaremos la referencia de la cláusula para referirnos indistintamente a una u otra, si bien es obvio que se trata de dos cuestiones distintas y el lector será capaz de distinguir en qué momento se utiliza una u otra.

Lema 4.6 (Condición hereditaria): Para cualquier EF4-modelo, $a, b \in K_{RM}$, y fbf A: Si ($a \leq b$ y $a \vDash_{RM} A$), entonces $b \vDash_{RM} A$

Prueba:
La prueba se desarrolla por inducción sobre k, la longitud de la fbf A:

(I) Para $k = 1$, A es una variable proposicional y es probado de manera automática por la Definición 4.1.C1

(II) Para $k \leq n$, donde $n \in \mathbb{N}$, asumimos la hipótesis de inducción.

(III) Para $k = n + 1$, tenemos 4 casos distintos, donde B y C dos fbf de complejidad k como mucho:

(a) A es de la forma $B \wedge C$: Por la Definición 4.1.C2 sabemos que $a \vDash_{RM} B$ y $a \vDash_{RM} C$, lo que unido a la Definición 4.1.C1 y la hipótesis de inducción nos da $b \vDash_{RM} B$ y $b \vDash_{RM} C$, lo que a su vez nos permite concluir $b \vDash_{RM} B \wedge C$ tal y como queríamos.

(b) A es de la forma $B \vee C$: La Definición 4.1.C3 nos ofrece dos posibilidades: $a \vDash_{RM} B$ ó $a \vDash_{RM} C$. Probamos la primera y la segunda se desarrolla de manera similar. Por la Definición 4.1.C1 y la hipótesis de inducción tenemos que $b \vDash_{RM} B$, lo que arroja el resultado $b \vDash_{RM} B \vee C$, quedando probado como queríamos.

(c) A es de la forma $B \rightarrow C$: Tras definir $a \vDash_{RM} B \rightarrow C$ como nuestra hipótesis inicial, procedemos por reductio suponiendo que $b \nvDash_{RM} B \rightarrow C$. Por la Definición 4.1.C4 tenemos que para algunos c, $d \in K_{RM}$, $Rbcd$, $c \vDash_{RM} B$ y $d \nvDash_{RM} C$. Por la Definición 4.1.P2 tenemos que $Racd$, lo que, desde los resultados obtenidos contradice la hipótesis inicial ya que nos proporciona $a \nvDash_{RM} B \rightarrow C$, probando así el caso (c).

(d) A es de la forma $\neg B$: Desde la Definición 4.1.P5 y D1 obtenemos $a \leq b \Rightarrow b* \leq a*$. Partiendo de $a \vDash_{RM} \neg B$, por la Definición 4.1.C5 tenemos $a* \nvDash_{RM} B$, lo que unido al resultado que hemos obtenido y la hipótesis de inducción nos ofrece $b* \nvDash_{RM} B$. Por la Definición 4.1.C5 obtenemos $b \vDash_{RM} \neg B$ tal y como pretendíamos.

■

Lema 4.7 (Lema de vinculación): Para fbf cualesquiera A, B: $\vDash_{EF4-RM} A \rightarrow B$ syss, si $a \vDash_{RM} A$, entonces $a \vDash_{RM} B$, para todo $a \in K_{RM}$

Prueba:

Probamos primero de izquierda a derecha:

Suponemos como hipótesis $\vDash_{EF4-RM} A \rightarrow B$ y $a \vDash_{RM} A$; La Definición 4.1.P1 nos permite obtener la relación $ROaa$, lo que nos proporciona $a \vDash_{RM} B$, tal y como queríamos.

Probamos ahora de derecha a izquierda:

En este caso suponemos que si $a \vDash_{RM} A$, entonces $a \vDash_{RM} B$, y suponemos adicionalmente c, $d \in K_{RM}$, $ROcd$ y $c \vDash_{RM} A$. Desde las hipótesis tenemos $c \vDash_{RM} B$. Dada la Definición 4.1.D1, tenemos $c \leq d$, lo que a su vez, por la Condición Hereditaria, nos da $d \vDash_{RM} B$.

■

Podemos ahora proceder a la prueba de corrección para EF4 respecto de los EF4-modelos.

Teorema 4.8 (Corrección de EF4): Para un conjunto de fbf cualesquiera Γ, y una fbf cualquiera A, si $\Gamma \vdash_{EF4} A$, entonces $\Gamma \vDash_{RM} A$

Prueba:
La prueba procede por inducción sobre k, la longitud de la derivación de $\Gamma \vdash_{EF4} A$

(I) Para $k = 1$, A es una de las fbf de Γ y, por tanto, $A \in \Gamma$ y la prueba es trivial. A su vez A puede ser un axioma y hemos de probar que este es válido. Por tanto probamos que todos los axiomas de EF4 son válidos según la semántica que hemos definido. Para ello, cuando los axiomas sean del tipo condicional, asumiremos el antecedente y probaremos su consecuente, procediendo por reductio cuando sea necesario. En el caso de tratarse de un axioma no condicional, procederemos por reductio directamente, asumiendo la falsedad de la conectiva principal. Sea $a \in K_{RM}$ y fbf A, B, C y D cualquiera:

(a) A1. $A \rightarrow A$

1. $a \vDash_{RM} A$	Hipótesis

En este caso, la propia hipótesis es el resultado pretendido.

(b) A2. $A \wedge B \rightarrow .A / A \wedge B \rightarrow .B$

1. $a \vDash_{RM} A \wedge B$	Hipótesis
2. $a \vDash_{RM} A$	Definición 4.1.C2, 1

(c) A3. $A \rightarrow .A \vee B / B \rightarrow .A \vee B$

1. $a \vDash_{RM} A$	Hipótesis
2. $a \vDash_{RM} A \vee B$	Definición 4.1.C3, 1

(d) A4. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow .A \rightarrow (B \wedge C)$

1. $a \vDash_{RM} (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$	Hipótesis
2. $Rabc$ y $b \vDash_{RM} A$	Hipótesis Adicional
3. $a \vDash_{RM} A \rightarrow B$ y $a \vDash_{RM} A \rightarrow C$	Definición 4.1.C2, 1
4. $c \vDash_{RM} B$	Definición 4.1.C4, 2, 3
5. $c \vDash_{RM} C$	Definición 4.1.C4, 2, 3
6. $c \vDash_{RM} B \wedge C$	Definición 4.1.C2, 4, 5

(e) A5. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C$

1. $a \vDash_{RM} (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$	Hipótesis
2. $Rabc$ y $b \vDash_{RM} A \vee B$	Hipótesis Adicional

3. $a \vDash_{RM} A \rightarrow C$ y $a \vDash_{RM} B \rightarrow C$ Definición 4.1.C2, 1
Desde 2 tenemos dos opciones diferentes: $b \vDash_{RM} A$ ó $b \vDash_{RM} B$.
Probamos la primera:
4. $b \vDash_{RM} A$ Definición 4.1.C3, 2
5. $c \vDash_{RM} C$ Definición 4.1.C4, 2, 3, 4
Dado que el resultado es el pretendido, probamos con la otra opción:
6. $b \vDash_{RM} B$ Definición 4.1.C3, 2
7. $c \vDash_{RM} C$ Definición 4.1.C4, 2, 3, 6

(f) A6. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow . (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

1. $a \vDash_{RM} A \wedge (B \vee C)$ Hipótesis
2. $a \vDash_{RM} A$ y $a \vDash_{RM} B \vee C$ Definición 4.1.C2, 1
Se plantean dos opciones diferentes: $a \vDash_{RM} B$ y $a \vDash_{RM} C$. Probamos la primera:
3. $a \vDash_{RM} B$ Definición 4.1.C3, 2
4. $a \vDash_{RM} A \wedge B$ Definición 4.1.C2, 2, 3
5. $a \vDash_{RM} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ Definición 4.1.C3, 4
Dado que 5 es el resultado pretendido, procedemos a la segunda opción:
6. $a \vDash_{RM} C$ Definición 4.1.C3, 2
7. $a \vDash_{RM} A \wedge C$ Definición 4.1.C2, 2, 6
8. $a \vDash_{RM} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ Definición 4.1.C3, 7

(g) A7. $A \rightarrow B \rightarrow . (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

1. $a \vDash_{RM} A \rightarrow B$ y $Rabc$ Hipótesis
2. $b \vDash_{RM} B \rightarrow C$, $c \nvDash_{RM} A \rightarrow C$ Hipótesis de Reductio
3. $Rcde$, $d \vDash_{RM} A$ y $e \nvDash_{RM} C$ Definición 4.1.C4, 2
4. R^2abde Definición 4.1.D2, 1, 3
5. $Radx$ y $Rbxe$ Definición 4.1.P3, 4
6. $x \vDash_{RM} B$ Definición 4.1.C4, 1, 3, 5
7. $e \vDash_{RM} C$ Definición 4.1.C4, 2, 5, 6

Pero 3 y 7 se contradicen.

(h) A8. $A \rightarrow B \rightarrow . (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$

1. $a \vDash_{RM} A \rightarrow B$ y $Rabc$ Hipótesis
2. $b \vDash_{RM} C \rightarrow A$ y $c \nvDash_{RM} C \rightarrow B$ Hipótesis de Reductio
3. $Rcde$, $d \vDash_{RM} C$ y $e \nvDash_{RM} B$ Definición 4.1.C4, 2
4. R^2abde Definición 4.1.D2, 1, 3
5. $Rbdx$ y $Raxe$ Definición 4.1.P6, 4
6. $x \vDash_{RM} A$ Definición 4.1.C4, 2, 3, 5
7. $e \vDash_{RM} B$ Definición 4.1.C4, 1, 5, 6

Pero 3 y 7 se contradicen.

(i) A9. $A \to \neg B \to .B \to \neg A$

1. $a \vDash_{RM} A \to \neg B$	Hipótesis
2. $a \nvDash_{RM} B \to \neg A$	Hipótesis de Reductio
3. $Rabc$, $b \vDash_{RM} B$ y $c \nvDash_{RM} \neg A$	Definición 4.1.C4, 2
4. $c* \vDash_{RM} A$	Definición 4.1.C5, 3
5. $Rac * b*$	Definición 4.1.P5, 3
6. $b* \vDash_{RM} \neg B$	Definición 4.1.C4, 1, 4, 5
7. $b \nvDash_{RM} B$	Definición 4.1.C5, 6

Pero 3 y 7 se contradicen.

(j) A10. $\neg\neg A \to A$

1. $a \vDash_{RM} \neg\neg A$	Hipótesis
2. $a \leq a**$	Definición 4.1.P4
3. $a** \vDash_{RM} \neg\neg A$	Lema 4.6, 1, 2
4. $a* \nvDash_{RM} \neg A$	Definición 4.1.C5, 3
5. $a \vDash_{RM} A$	Definición 4.1.C5, 4

(k) A11. $A \to (A \to B) \to .A \to B$

1. $a \vDash_{RM} A \to (A \to B)$	Hipótesis
2. $Rabc$ y $b \vDash_{RM} A$	Hipótesis Adicional
3. R^2abbc	Definición 4.1.P7, 1
4. $Rabx$ y $Rxbc$	Definición 4.1.D2, 3
5. $x \vDash_{RM} A \to B$	Definición 4.1.C4, 1, 2, 4
6. $c \vDash_{RM} B$	Definición 4.1.C4, 2, 4, 5

(l) A12. $[(A \to A) \wedge (B \to B)] \to C \to .C$

1. $a \vDash_{RM} (A \to A) \wedge (B \to B) \to .C$	Hipótesis
2. $Raxa$	Definición 4.1.P8

Por P8 sabemos que Zx significa que, para b, $c \in K$ cualesquiera, si $Rxbc$, entonces $RObc$. Dado que queremos probar que $x \vDash_{RM} A \to A$ y $x \vDash_{RM} B \to B$, procedemos por Reductio, suponiendo que $x \nvDash_{RM} A \to A$ ó $x \nvDash_{RM} B \to B$. Entonces hay dos opciones: para $b,\ c \in K_{RM}$, tales que $Rxbc$ y $b \vDash_{RM} A$ y $c \nvDash_{RM} A$; o para b', $c' \in K_{RM}$ $b' \vDash_{RM} B$ y $c' \nvDash B$. Dada la gran similitud entre ambos casos, probaremos sólo el primero y el segundo se probará de manera similar. El resultado unido a la relación $RObc$ y la Definición 4.1.D1, nos proporciona $b \nvDash_{RM} A$, generando una contradicción.

3. $x \vDash_{RM} A \to A$ y $x \vDash_{RM} B \to B$	2
4. $x \vDash_{RM} (A \to A) \wedge (B \to B)$	Definición 4.1.C2, 3

5. $a \vDash_{RM} C$ Definición 4.1.C4, 1, 2, 4

(m) A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$

1. $O \nvDash_{RM} (A \vee \neg B) \vee (A \to B)$ Hipótesis de Reductio
2. $O \nvDash_{RM} A \vee \neg B$ y $O \nvDash_{RM} A \to B$ Definición 4.1.C3, 1
3. $O \nvDash_{RM} A$ y $O \nvDash_{RM} \neg B$ Definición 4.1.C3, 2
4. $RObc$, $b \vDash_{RM} A$ y $c \nvDash_{RM} B$ Definición 4.1.C4, 2
5. $b \leq O$ ó $O* \leq c$ Definición 4.1.P9, 4

Tenemos 2 posibilidades distintas. Probamos la primera:

6. $O \vDash_{RM} A$ Lema 4.6, 4, 5

Pero 3 y 6 se contradicen. Probamos la segunda:

7. $O* \nvDash_{RM} B$ Lema 4.6, 4, 5
8. $O \vDash_{RM} \neg B$ Definición 4.1.C5, 7

Pero 3 y 8 se contradicen.

(n) A14. $B \wedge \neg (A \to B) \to \mathbf{.}\neg B$

1. $a \vDash_{RM} B \wedge \neg (A \to B)$ Hipótesis
2. $a \nvDash_{RM} \neg B$ Hipótesis de Reductio
3. $a \vDash_{RM} B$ y $a \vDash_{RM} \neg (A \to B)$ Definición 4.1.C2, 1
4. $a* \nvDash_{RM} A \to B$ Definición 4.1.C5, 3
5. $Ra*bc$, $b \vDash_{RM} A$ y $c \nvDash_{RM} B$ Definición 4.1.C4, 4
6. $a* \leq c$ ó $a \leq c$ Definición 4.1.P10, 5

Ahora hay dos opciones. Probamos la primera:

7. $a* \nvDash_{RM} B$ Lema 4.6, 5, 6
8. $a \vDash_{RM} \neg B$ Definición 4.1.C5, 7

Pero 2 y 8 se contradicen. Probamos entonces la segunda:

9. $a \nvDash_{RM} B$ Lema 4.6, 5, 6

Pero 3 y 9 se contradicen.

(o) A15. $\neg (A \to B) \to \mathbf{.}A \vee \neg B$

1. $a \vDash_{RM} \neg (A \to B)$ Hipótesis
2. $a* \nvDash_{RM} A \to B$ Definición 4.1.C5, 1
3. $Ra*bc$, $b \vDash_{RM} A$ y $c \nvDash_{RM} B$ Definición 4.1.C4, 2
4. $b \leq a$ ó $a* \leq c$ Definición 4.1.P11, 3

Al tener dos opciones probamos con la primera:

5. $a \vDash_{RM} A$ Lema 4.6, 3, 4
6. $a \vDash_{RM} A \vee \neg B$ Definición 4.1.C3, 5

Obtenido el resultado que buscábamos, procedemos con la segunda:

7. $a* \nvDash_{RM} B$ Lema 4.6, 3, 4
8. $a \vDash_{RM} \neg B$ Definición 4.1.C5, 7
9. $a \vDash_{RM} A \vee \neg B$ Definición 4.1.C3, 8

(II) Para $k \leq n$, donde $n \in \mathbb{N}$, asumimos la hipótesis de inducción

(III) Para $k = n+1$, A puede, o bien ser un axioma, o bien haber sido derivada a través de una de las reglas del sistema. Para el caso en que A sea un axioma nos remitimos a (I). Por tanto únicamente hemos de probar que las reglas de EF4 preservan la validez. Tenemos un subcaso para cada una de las diferentes reglas:

(a) Si A es derivada por R1, Adjunción, el caso es trivial.

(b) Si A ha sido derivada por R2, Modus Ponens, suponemos $\Gamma \vDash_{RM} B \rightarrow A$ y $\Gamma \vDash_{RM} B$ para una fbf cualquiera B. Adicionalmente suponemos $O \vDash_{RM} \Gamma$. Desde aquí obtenemos $O \vDash_{RM} B \rightarrow A$ y $O \vDash_{RM} B$. Por la Definición 4.1.P1 tenemos que $ROOO$, lo que nos proporciona, por la Definición 4.1.C4 $O \vDash_{RM} A$.

(c) A es derivada por R3, Contraejemplo Disyuntivo, A tiene la forma $D \vee \neg(B \rightarrow C)$. Suponemos $\Gamma \vDash_{RM} D \vee B$, $\Gamma \vDash_{RM} D \vee \neg C$ y también $O \vDash_{RM} \Gamma$. Concluimos que $O \vDash_{RM} D \vee B$ y $O \vDash_{RM} D \vee \neg C$. Procedemos ahora por reductio suponiendo que $O \nvDash_{RM} D \vee \neg(B \rightarrow C)$. Sabemos entonces que $O \nvDash_{RM} D$ y $O \nvDash_{RM} \neg(B \rightarrow C)$. Por ello podemos, a su vez, obtener los resultados $O* \vDash_{RM} B \rightarrow C$, $O \vDash_{RM} B$ y $O \vDash_{RM} \neg C$, que a su vez nos proporciona $O* \nvDash_{RM} C$. Por la Definición 4.1.P12 tenemos $RO * OO*$, lo que nos lleva a poder concluir $O* \vDash_{RM} C$, obteniendo una contradicción.

Queda así probado el Teorema de corrección.
■

Una vez probada la corrección del sistema con respecto de los EF4-modelos, nuestro siguiente paso ha de ser dar una serie de definiciones previas al Teorema de completud:

Definición 4.9 (T-teorías): Una teoría a, es un conjunto de fbf cerrado por Implicación y Adjunción.

Sea T una teoría normal, prima y cerrada por Contraejemplo Disyuntivo, entonces, una T-teoría es un conjunto de fbf cerrado por Adjunción y T-implicación. Es decir, a es una T- teoría si, para cualesquiera fbf A y B:
(I) Si $A \in a$ y $B \in a$, entonces $A \wedge B \in a$
(II) Si $A \rightarrow B \in T$ y $A \in a$, entonces $B \in a$.

Definición 4.10 (Los conjuntos K^T_{RM} y K^c_{RM}): Sea T una teoría normal y prima. K^T_{RM} es el conjunto de todas las T-teorías y K^c_{RM} es el conjunto de todas las T-teorías no vacías, a-consistentes y primas.

Definición 4.11 (Las relaciones R^T, R^c y $\vDash^c_{RM}$): Sea T una teoría normal y prima, y K^T_{RM} y K^c_{RM}, los conjuntos desarrollados en la Definición 4.10. R^T es definido en K^T_{RM} como sigue: Para todo a, b, $c \in K^T_{RM}$, $R^T abc$ syss para fbf cualesquiera A, B, si ($A \rightarrow B \in a$ y $A \in b$), entonces $B \in c$. Por consiguiente, R^c es la restricción de R^T a K^c_{RM}. Por otro lado, $\vDash^c_{RM}$ es definido como sigue: para $a \in K^c_{RM}$ y fbf A cualquiera, $a \vDash^c_{RM} A$ syss $A \in a$.

Definición 4.12 (La operación $*^c$): La operación unaria $*^c$ se define sobre K^c_{RM} como sigue, para cada $a \in K^c_{RM}$, $a* = \{A|\neg A \notin a\}$

Tras esta serie de definiciones daremos una serie de lemas vinculados a las relaciones R^T y R^c

Lema 4.13 (Definición de x para a, b en R^T): Sean a y b T-teorías no vacías. El conjunto $x = \{B|\exists A\,(A \to B \in a\, y\, A \in b)\}$ es una T-teoría no vacía tal que $R^T abx$.

Prueba:

Para probar que x es una T-teoría nos vale con usar De Morgan (V) para probar que está cerrada por Adjunción, y A7 para probar que está cerrada por T-implicación. $R^T abx$ es inmediato por la definición de R^T. Finalmente, para probar que x es no vacía, suponemos $A \in a$, $B \in b$, y a través de la relación $R^T abx$ y el Teorema II, $A \to .B \to (A \vee B)$, obtenemos $(A \vee B) \in x$, probando que x es, efectivamente, no vacía.

■

Lema 4.14 (Extensión de b en $R^T abc$ a un elemento de K^c_{RM}): Sean a y b T-teorías no vacías, y a y c T-teorías a-consistentes, y primas, tales que $R^T abc$. Entonces, hay una T-teoría a-consistente y no vacía, x tal que $b \subseteq x$ y $R^T axc$.

Prueba:

Por el Lema 2.37 o, como alternativa, por el Lema de Kuratowski-Zorn (Cf. [Kuratowski, 1922] y [Zorn, 1935]), podemos extender b a una T-teoría prima x tal que $b \subseteq x$ y $R^T axc$. El siguiente paso es probar la a-consistencia de x; para ello procedemos por Reductio y suponemos que no lo es. Sea A una fbf tal que $A \in a$ y B una fbf que no pertenece ni a a ni a c; i. e: $B \notin a$ y $B \notin c$. Por el Teorema I, $A \to .\neg A \vee (\neg A \to B)$, tenemos $\neg A \vee (\neg A \to B) \in a$. Por la primacía de a sabemos que $\neg A \in a$ ó $\neg A \to B \in a$. Supongamos el segundo caso: $\neg A \to B \in a$. Como suponemos que x es no a-consistente, es decir, trivial, tenemos que $\neg A \in x$; desde aquí podemos concluir, por la definición de R^T, $R^T axc$ y los resultados previos, $B \in c$, pero ello contradice nuestra hipótesis inicial. Probamos ahora el segundo caso, $\neg A \in a$. Por el Teorema III, $\neg A \to .B \vee [\neg\,(A \wedge B) \to C]$, para una fbf arbitraria C, tenemos que $B \vee [\neg\,(A \wedge B) \to C] \in a$. Dado que la hipótesis señala que $B \notin a$, sabemos que $\neg\,(A \wedge B) \to .C \in a$. Por la supuesta trivialidad de x sabemos que $\neg\,(A \wedge B) \in x$, lo que, unido a $R^T axc$, nos proporciona $C \in c$, contradiciendo la a-consistencia de c.

■

Lema 4.15 (Extensión de a en R^Tabc a un elemento de K^c_{RM}): Sean a y b T-teorías no vacías, y c una T-teoría prima y a-consistente, tal que R^Tabc. Entonces existe una T-teoría prima, a-consistente y no vacía x, tal que $a \subseteq x$ y R^Txbc.

Prueba:
Al igual que en el lema anterior hay una T-teoría prima tal que $a \subseteq x$ y R^Txbc. El siguiente paso consiste en mostrar que x es a-consistente. Procedemos por Reductio Ad Absurdum y suponemos que no lo es. A su vez, suponemos que para una fbf cualquiera A, $A \in b$. Dado que x es supuestamente trivial tenemos que para otra fbf cualquiera B, $A \to B \in x$. Por la definición de R^T sabemos que $B \in c$, negando así su a-consistencia y generando una contradicción.
■

A continuación definimos la relación $\leq^c$ y probamos un lema relacionado con ella.

Definición 4.16 (La relación $\leq^c$): Para cualesquiera a, $b \in K^c_{RM}$, $a \leq^c b$ syss R^cTab.

Lema 4.17 ($\leq^c$ y $\subseteq$ son coextensivas): Para cualesquiera a, $b \in K^c_{RM}$, $a \leq^c b$ syss $a \subseteq b$.

Prueba:
De izquierda a derecha es inmediata por A1. De derecha a izquierda suponemos $a \subseteq b$ para a, $b \in K^c_{RM}$. Claramente R^cTaa (Por las Definiciones 4.10 y 4.11). Por la hipótesis tenemos R^cTab, lo que es idéntico a decir que $a \leq^c b$.
■

Lema 4.18 (Extensión a T-teorías primas): Sea a una T-teoría y A una fbf tal que $A \notin a$. Entonces hay una T-teoría prima, x tal que $a \subseteq x$ y $A \notin x$.

Prueba:
Es inmediata por la aplicación del Lema de Kuratowski-Zorn.
■

Nuestro siguiente paso consistirá en ampliar la capacidad y nuestro conocimiento de la operación $*^c$.

Lema 4.19 (Primacía de las $*$-imágenes): Sea a una T-teoría. Entonces:
(I) $a*$ es también una T-teoría prima.
(II) Para cualquier fbf A, $\neg A \in a*$ syss $A \notin a$

Prueba:
Para (I) sabemos que $a*$ está cerrada por T-implicación por contraposición, cerrada por adjunción por De Morgan (V), y es prima por De Morgan (II).
Para (II) utilizamos las dos posibilidades de la doble negación.
■

Lema 4.20 ($*^c$ es una operación en K^c_{RM}): Sea a una T-teoría prima, a-consistente y no vacía. Entonces, $a*^c$ es una T-teoría prima, a-consistente y no vacía.

Prueba:
Por el Lema 4.19.(I) $a*^c$ es una T-teoría prima. Para probar que $a*^c$ es a-consistente, partimos del hecho de que a es no vacía, con lo cual ha de haber, al menos, una fbf A tal que $A \in a$. Por el Lema 4.20.(II), tenemos que $\neg A \notin a*^c$, probando así la a-consistencia. Por último, la no vacuidad de $a*^c$ se prueba de manera similar. Por la a-consistencia de a, hay, al menos, una fbf A tal que $A \notin a$. Por Lema 4.21.(II) tenemos que $\neg A \in a*^c$, haciendo así a $a*^c$ no vacía.
■

Como último paso, probamos que la relación $\vDash^c_{RM}$ cumple la cláusulas de los EF4-modelos.

Lema 4.21 ($\vDash^c_{RM}$ cumple las cláusulas): Para toda a, b, $c \in K^c_{RM}$, y fbf A y B:
C1. Si ($a \leq^c b$ y $a \vDash^c_{RM} p$), entonces $b \vDash^c_{RM} p$
C2. $a \vDash^c_{RM} A \wedge B$ syss $a \vDash^c_{RM} A$ y $a \vDash^c_{RM} B$
C3. $a \vDash^c_{RM} A \vee B$ syss $a \vDash^c_{RM} A$ ó $a \vDash^c_{RM} B$
C4. $a \vDash^c_{RM} A \rightarrow B$ syss para todo $b, c \in K^c_{RM}$, si $R^c abc$ y $b \vDash^c_{RM} A$, entonces $c \vDash^c_{RM} B$
C5. $a \vDash^c_{RM} \neg A$ syss $a* \nvDash^c_{RM} A$

Prueba:
C1 es inmediato por el Lema 4.18. C2 se sigue por A2 y el hecho de que a está cerrada por Adjunción. C3 se prueba por A3 y la primacía de a. C5 se cumple inmediatamente por la Definición 4.12. C4 de izquierda a derecha se prueba por la Definición 4.11 de manera inmediata. Por tanto nos falta probar C4 de derecha a izquierda. Para fbf A y B y $a \in K^c_{RM}$, suponemos $A \rightarrow B \notin a$, i. e: $a \nvDash^c_{RM} A \rightarrow B$. Probamos que hay x, $y \in K^c_{RM}$ tales que $R^c axy$, $A \in x$ y $B \notin y$. Consideramos los conjuntos $z = \{C \mid A \rightarrow B \in T\}$ y $u = \{C \mid \exists D\,(D \rightarrow C \in a\, y\, D \in z)\}$. Hay que señalar que $A \in z$, ya que $A \rightarrow A \in T$ por A1. Resulta obvio que z y u son T-teorías, tales que $R^T azu$. Adicionalmente sabemos que $B \notin u$, ya que si $B \in u$ se da el caso en el que $A \rightarrow B \in a$ contradiciendo la hipótesis. Por el Lema 4.13 u es no vacía, y por el Lema 4.18 hay una T-teoría prima, a-consistente y no vacía, y, tal que $u \subseteq y$ y $B \notin y$. Por la Definición 4.11 tenemos que $R^T azy$. Por último, usando el Lema 4.15, z es extendido a una T-teoría prima, a-consistente y no vacía, x, tal que $z \subseteq x$

y $R^C axy$. Claramente $A \in x$. De esta manera tenemos T-teorías primas, a-consistentes y no vacías, x e y tales que $A \in x$, $B \notin y$ y $R^c axy$ tal y como debía ser probado.

Al igual que ocurría con la Proposición 4.5 y la clausula C5 de la Definición 4.1, aquí se tiene de nuevo una relación entre el punto (II) del Lema 4.19 y la clausula C5 del Lema 4.21. Al igual que hicimos antes, utilizaremos la referencia del Lema 4.21 para referirnos a ambos casos en aras de facilitar la lectura.

1.2 Completud de EF4 con respecto del modelo general reducido

En esta sección daremos una serie de nociones y pruebas previas a la demostración del teorema de completud.

Proposición 4.22 (Construcción de T): Sea Γ un conjunto de fbf y A una fbf tal que $\Gamma \nvdash_{EF4} A$. Entonces hay una teoría normal, prima, cerrada por las reglas de la lógica, y a-consistente T, tal que $\Gamma \subseteq T$ y $A \notin T$.

Prueba:
Asumiendo la hipótesis de la proposición, suponemos $\Gamma \nvdash_{EF4} A$. Desde aquí se sigue que $\Gamma \nvdash^d_{EF4} A$ y $A \notin Cn\Gamma$ (EF4). A continuación, por los Lemas 2.37 y 2.38, hay una EF4-teoría normal, prima y a-consistente T, tal que $\Gamma \subseteq T$ y $A \notin T$. Por último, la aplicación del Lema 2.37 hace que T se encuentre cerrada bajo todas las reglas de la lógica.
■

Apoyándonos en esta teoría T podemos definir el modelo canónico.

Definición 4.23 (El EF4-modelo canónico): El modelo canónico es la estructura $\langle T, K^c_{RM}, R^c, *^c, \vDash^c_{RM} \rangle$, donde K^c_{RM}, R^c, $*^c$ y $\vDash^c_{RM}$ son definidos sobre la T-teoría T tal y como se expresa en las Definiciones 4.10, 4.11 y 4.12

Como dos últimos pasos antes del teorema de completud debemos probar que los postulados semánticos se siguen canónicamente y, gracias a esto, mostrar que el EF4-modelo canónico es un EF4-modelo. Para simplificar la lectura y hacerla lo más sencilla posible, y sabiendo que estamos trabajando en el modelo canónico, utilizaremos la nomenclatura habitual para la relación R y la operación $*$; i. e: en vez de usar R^c y $*^c$, utilizaremos R y $*$.

Lema 4.24 (Los postulados se siguen canónicamente): Los postulados semánticos P1 a P12, se siguen canónicamente dentro del EF4-modelo canónico de la Definición 4.22

Prueba:
Procedemos por Reductio Ad Absurdum cuando sea necesario:
(I). $a \leq^c a$

1. $A \in a$ y $A \notin a$	Hipótesis de Reductio

Pero 1 es una contradicción en si mismo.

(II). Si $a \leq^c b$ y $Rbcd$, entonces $Racd$

1. $Rbcd$ y $a \leq^c b$	Hipótesis
2. $A \to B \in a$, $A \in c$ y $B \notin d$	Hipótesis de Reductio
3. $A \to B \in b$	Lema 4.17, 1, 2
4. $A \to B \notin b$	Lema 4.21.C4, 1, 2

Pero 3 y 4 se contradicen.

(III). Si R^2abcd, entonces $(\exists x \in K^c_{RM})\,(Racx\; y\; Rbxd)$

1. R^2abcd	Hipótesis
2. $Raby$ y $Rycd$	Definición 4.1.D2, 1
3. Sea $x = \{B \vert \exists A\,[A \to B \in a \text{ y } A \in c]\}$	Definición de x
4. $A \to B \in a$ y $A \in c$	Hipótesis Adicional
5. $x \in K^c_{RM}$	Definición 4.10
6. $Racx$	Lema 4.13, 5
7. $B \to C \in b$ y $B \in x$	Hipótesis Adicional
8. $\vdash_{EF4} A \to B \to\!\boldsymbol{.}\,(B \to C) \to (A \to C)$	A7
9. $B \to C \to\!\boldsymbol{.}A \to C \in a$	Definición 4.9, 4, 8
10. $A \to C \in y$	Lema 4.21.C4, 2, 7, 9
11. $C \in d$	Lema 4.21.C4, 2, 4, 10

(IV). $a = a{*}{*}$
Primero probamos de izquierda a derecha:

1. $A \in a$ y $A \notin a{*}{*}$	Hipótesis de Reductio
2. $\neg A \notin a*$	Lema 4.21.C5, 1
3. $\neg\neg A \in a{*}{*}$	Lema 4.21.C5, 2
4. $\vdash_{EF4} \neg\neg A \to A$	A10
5. $A \in a{*}{*}$	Definición 4.9, 3, 4

Pero 1 y 5 se contradicen. Probamos ahora de derecha a izquierda:

1. $A \in a{*}{*}$ y $A \notin a$	Hipótesis de Reductio
2. $\neg A \notin a*$	Lema 4.21.C5, 1
3. $\neg\neg A \in a$	Lema 4.21.C5, 2

4. $\vdash_{EF4} \neg\neg A \to A$	A10
5. $A \in a$	Definición 4.9, 3, 4

Pero 1 y 5 se contradicen.

(V). Si $Rabc$, entonces $Rac*b*$

1. $Rabc$	Hipótesis
2. $A \to B \in a$, $A \in c*$ y $B \notin b*$	Hipótesis de Reductio
3. $\neg A \notin c$	Lema 4.21.C5, 2
4. $\neg B \in b$	Lema 4.21.C5, 2
5. $\vdash_{EF4} A \to B \to .\neg B \to \neg A$	Contraposición (II)
6. $\neg B \to \neg A \in a$	Definición 4.9, 2, 5
7. $\neg A \in c$	Lema 4.21.C4, 1, 4, 6

Pero 3 y 7 se contradicen.

(VI). Si R^2abcd, entonces $\left(\exists x \in K^C_{RM}\right)(Rbcx$ y $Raxd)$

1. R^2abcd	Hipótesis
2. $Raby$ y $Rycd$	Definición 4.1.D2, 1
3. Sea $x = \{A \vert \exists C\,[C \to A \in b$ y $C \in c]\}$	Definición de x
4. $C \to A \in b$ y $C \in c$	Hipótesis Adicional
5. $x \in K^c_{RM}$	Definición 4.10
6. $Rbcx$	Lema 4.13, 5
7. $A \to B \in a$ y $B \in x$	Hipótesis Adicional
8. $\vdash_{EF4} A \to B \to .(C \to A) \to (C \to B)$	A8
9. $C \to A \to .C \to B \in a$	Definición 4.9, 7, 8
10. $C \to B \in y$	Lema 4.21.C4, 2, 4, 9
11. $B \in d$	Lema 4.21.C4, 2, 4, 10

(VII). Si $Rabc$, entonces R^2abbc

Para esta prueba probaremos que desde la relación $Rabc$ se siguen las relaciones $Rabx$ y $Rxbc$

1. Sea $x = \{B \vert \exists A\,[A \to B \in a$ y $A \in b]\}$	Definición de x
2. $Rabc$	Hipótesis
3. $x \in K^c_{RM}$	Definición 4.10
4. $Rabx$	Lema 4.13, 3
De cara a probar $Rxbc$ suponemos que:	
5. $B \to C \in x$ y $B \in b$	Hipótesis Adicional
Y de manera adicional, para una fbf A:	
6. $A \to .B \to C \in a$ y $A \in b$	5
7. $\vdash_{EF4} A \to (B \to C) \to .(A \wedge B) \to C$	Importación
8. $A \wedge B \to .C \in a$ y $A \wedge B \in b$	6, 7
9. $C \in c$	Lema 4.21.C4, 1, 8

(VIII). $(\exists x \in Z)\, Raxa$ [Za syss para toda b, $c \in K^c_{RM}$, si $Rabc$, entonces $RTbc$]

En un primer momento definimos el conjunto x como $x = \{A |\, [B \to B \to . A \in T]\}$. Una vez definido este conjunto para probar que es una T-teoría hemos de mostrar que está cerrado por T-implicación y Adjunción. Probamos la primera cuestión para fbf cualesquiera A yB:

1. $A \to B \in T$ y $A \in x$	Hipótesis
2. $C \to C \to . A \in T$	Definición x, 1
3. $\vdash_{EF4} (C \to C) \to A \to . (A \to B) \to [(C \to C) \to B]$	A7
4. $A \to B \to . (C \to C) \to B \in T$	Definición 4.9, 2, 3
5. $C \to C \to . B \in T$	Definición 4.9, 1, 4
6. $B \in x$	Definición x, 5

Una vez probado que x está cerrado por T-implicación, probamos la segunda cuestión, de nuevo para fbf cualesquiera A y B:

1. $A \in x$ y $B \in x$	Hipótesis
2. $C \to C \to . A \in T$	Definición x, 1
3. $D \to D \to . B \in T$	Definición x, 1
4. $(C \to C) \wedge (D \to D) \to . A \wedge B \in T$	Introducción Condicionada de la Conjunción, 2, 3
5. $\vdash_{EF4} [(C \to C) \wedge (D \to D)] \to [(C \to C) \wedge (D \to D)] \to . (C \to C) \wedge (D \to D)$	A12
6. $[(C \to C) \wedge (D \to D)] \to [(C \to C) \wedge (D \to D)] \to . A \wedge B \in T$	Transitividad, 4, 5
7. $A \wedge B \in x$	Definición x, 6

Así queda probado que x está cerrado por Adjunción. A continuación probamos $Raxa$:

1. $A \to B \in a$ y $A \in x$	Hipótesis
2. $C \to C \to . A \in T$	Definición x, 1
3. $\vdash_{EF4} (C \to C) \to A \to . (A \to B) \to [(C \to C) \to B]$	A7
4. $A \to B \to . (C \to C) \to B \in T$	Definición 4.9, 2, 3
5. $C \to C \to . B \in a$	Definición 4.9, 1, 4
6. $\vdash_{EF4} (C \to C) \to B \to . B$	Aserción Especial
7. $B \in a$	Definición 4.9, 5, 6

Una vez probado $Raxa$, extendemos x a una teoría prima a través del Lema de Kuratowski-Zorn, tal y como hicimos en el Lema 4.17 y, como último paso, probamos que si$Rxbc$, entonces $RTbc$:

1. $Rxbc$	Hipótesis
2. $A \to B \in T$ y $A \in b$	Hipótesis
3. $\vdash_{EF4} A \to B \to . (B \to B) \to (A \to B)$	A7
4. $B \to B \to . A \to B \in T$	Definición 4.9, 2, 3
5. $A \to B \in x$	Definición x, 4
6. $B \in c$	Lema 4.21.C4, 1, 2, 5
7. $RTbc$	Definición 4.9, 2, 6

Así queda probado el postulado P8.

(IX). Si $RTbc$, entonces $b \leq^c T$ ó $T* \leq^c c$

1. $RTbc$	Hipótesis
2. $A \in b$, $A \notin T$, $B \in T*$, $B \notin c$	Hipótesis de Reductio
3. $\vdash_{EF4} (A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)$	A13
4. $(A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B) \in T$	3

Tenemos ahora dos posibilidades: $A \vee \neg B \in T$ ó $A \rightarrow B \in T$.
Suponemos la primera:

5. $A \vee \neg B \in T$	Lema 4.21.C3, 4
6. $\neg B \notin T$	Lema 4.21.C5, 2
7. $A \in T$	Lema 4.21.C3, 5, 6

Pero 2 y 7 se contradicen. Probamos la segunda opción:

8. $A \rightarrow B \in T$	Lema 4.21.C3, 4
9. $A \rightarrow B \notin T$	Lema 4.21.C4, 1, 2

Pero 8 y 9 se contradicen.

(X). Si $Ra * bc$, entonces $a* \leq^c c$ ó $a \leq^c c$

1. $Ra * bc$	Hipótesis
2. $A \in a*$, $A \notin c$, $B \in a$ y $B \notin c$	Hipótesis de Reductio

Dado que las teorías son no vacías podemos concluir que hay, al menos, una fbf C tal que:

3. $C \in b$	Hipótesis Adicional
4. $A \vee B \notin c$	Lema 4.21.C3, 2
5. $C \rightarrow .A \vee B \notin a*$	Lema 4.21.C4, 1, 3, 4
6. $\vdash_{EF4} (A \vee B) \wedge \neg [C \rightarrow (A \vee B)] \rightarrow .\neg (A \vee B)$	TE8
7. $A \vee B \in a$	Lema 4.21.C3, 1
8. $\neg [C \rightarrow (A \vee B)] \in a$	Lema 4.21.C5, 5
9. $(A \vee B) \wedge \neg [C \rightarrow (A \vee B)] \in a$	Lema 4.21.C2, 8
10. $\neg (A \vee B) \in a$	Definición 4.9, 6, 9
11. $\vdash_{EF4} \neg (A \vee B) \rightarrow .\neg A \wedge \neg B$	De Morgan (I)
12. $\neg A \wedge \neg B \in a$	Definición 4.9, 10, 11
13. $\neg A \in a$	Lema 4.21.C2, 12
14. $A \notin a*$	Lema 4.21.C5

Pero 2 y 14 se contradicen

(XI). Si $Ra * bc$, entonces $b \leq^c a$ ó $a* \leq^c c$

1. $Ra * bc$	Hipótesis
2. $A \in b$, $A \notin a$, $B \in a*$, $B \notin c$	Hipótesis de Reductio
3. $\vdash_{EF4} \neg (A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B$	A15
4. $A \rightarrow B \notin a*$	Lema 4.21.C4, 1, 2

5. $\neg(A \to B) \in a$ Lema 4.21.C5, 2
6. $A \vee \neg B \in a$ Definición 4.9, 3, 5
Existen ahora dos opciones: $A \in a$ y $\neg B \in a$. Procedemos con la primera:
7. $A \in a$ Lema 4.21.C3, 6
Pero 2 y 7 se contradicen. Procedemos entonces con la segunda:
8. $\neg B \in a$ Lema 4.21.C3, 6
9. $B \notin a*$ Lema 4.21.C5, 8

Pero 2 y 9 se contradicen.

(XII). $RT * TT*$

1. $A \to B \in T*$, $A \in T$, $B \notin T*$ Hipótesis de Reductio
2. $\neg B \in T$, $\neg(A \to B) \notin T$ Lema 4.21.C5, 1
3. $\neg(A \to B) \in T$ R4, 1, 2

Pero 2 se contradice con 3.
■

Proposición 4.25 (El EF4-modelo canónico es un EF4-modelo): El EF4-modelo canónico es, de hecho, un EF4-modelo.

Prueba:
Dada la Definición 4.22 y la Proposición 4.23, la prueba sigue de manera automática por el Lema 4.20, Lema 4.21 y el Lema 4.24
■

Por último podemos ya dar la prueba del Teorema de completud.

Teorema 4.26 (Teorema de completud para EF4): Para cualquier fbf de EF4 A, si $\Gamma \models_{RM} A$ entonces $\Gamma \vdash_{EF4} A$

Prueba:
Sea Γ un conjunto de fbf cualquiera y A una fbf cualquiera; suponemos que $\Gamma \nvdash_{EF4} A$ y desde aquí probaremos que $\Gamma \nvDash_{RM} A$. Dada la hipótesis tenemos que $A \notin Cn\Gamma[EF4]$ y, por tanto, $Cn\Gamma[EF4] \nvdash^{d}_{EF4} A$, ya que si no tendríamos que $B_1 \wedge ... \wedge B_n \vdash_{EF4} A$ para fbf tales que $B_1 \wedge ... \wedge B_n \in Cn\Gamma[EF4]$, dando como resultado que A se encontraría en $Cn\Gamma[EF4]$. Por el Lema 2.37, el Lema de extensión, existe un conjunto maximal Γ', cerrado por Contraejemplo Disyuntivo, tal que $Cn\Gamma[EF4] \subseteq \Gamma'$ y, además, $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y $A \notin \Gamma'$. Por la Proposición 4.22 Γ'es una teoría normal, prima y a-consistente. Por tanto, sabiendo que el modelo canónico desarrollado en la Definición 4.22 es, de hecho, un modelo por la Proposición 4.25, tendríamos que $\Gamma \nvDash_{RM} A$ por la Definición 4.3.
■

2 Semántica relacional ternaria basada en 2 set-up para EF4

La semántica relacional ternaria basada en 2 set-up nos ofrece una herramienta interesante para estudiar los sistemas relevantes desde una perspectiva un tanto diferente a la clásica semántica de modelo reducido que acabamos de tratar. Su origen es previo a la publicación de [Routley et al., 1982] y, aunque el artículo original, [Mortensen, 1980], no se encuentra disponible, pueden consultarse con facilidad [Mortensen, 1982] y [Meyer y Mortensen, 1984]

2.1 Modelo de 2 Set-up para EF4

Comenzaremos por definir el modelo de 2 set-up para el sistema EF4:

Definición 4.27 (Modelo de 2 Set-up para EF4): Sea K_{RM2} un conjunto cuyos únicos elementos son O y $O*$. Sea $*$ una operación involutiva definida en el conjunto K_{RM2}, tal que, para cualquier $x \in K_{RM2}$, $x = x**$. Así, un Modelo de 2 Set-up para EF4 será la estructura $(K_{RM2}, *, R_{RM2}, \vDash_{RM2})$, donde R_{RM2} es una relación ternaria en K_{RM2} definida como sigue: si a, b, $c \in K_{RM2}$, entonces $R_{RM2}abc$ syss $b = c$ ó $(b = O\ y\ a = c)$, o lo que es lo mismo, las relaciones $R_{RM2}OOO$, $R_{RM2}O*O*O*$, $R_{RM2}OO*O*$, $R_{RM2}O*OO$ y $R_{RM2}O*OO*$. Y $\vDash_{RM2}$ es una relación de evaluación desde K_{RM2} hasta el conjunto de la fbf tal que las siguientes cláusulas se cumplen para toda variable proposicional p, fbf A, B y $a \in K_{RM2}$:

C1. $a \vDash_{RM2} p$ ó $a \nvDash_{RM2} p$

C2. $a \vDash_{RM2} A \wedge B$ syss $a \vDash_{RM2} A$ y $a \vDash_{RM2} B$

C3. $a \vDash_{RM2} A \vee B$ syss $a \vDash_{RM2} A$ ó $a \vDash_{RM2} B$

C4. $a \vDash_{RM2} A \rightarrow B$ syss, para todo b, $c \in K_{RM2}$, si $R_{RM2}abc$ y $b \vDash_{RM2} A$, entonces $c \vDash_{RM2} B$

C5. $a \vDash_{RM2} \neg A$ syss $a* \nvDash_{RM2} A$

Adicionalmente hemos de dar una serie de propiedades semánticas que caractericen la relación R_{RM2} que hemos definido en este modelo. Estas popiedades no son sino la expresión de hechos obvios de la relación, pero que demostrarán ser útiles. Partimos del hecho de que $a \leq b =_{df} R_{RM2}Oab$ y así podemos definir:

P1. $a \leq b$ syss $a = b$

P2. $R_{RM2}Oaa$

A continuación se definen validez en un modelo de 2 Set-up para EF4, validez y consecuencia semántica.

Definición 4.28 (Validez en un modelo de 2 Set-up para EF4): Una fbf A es válida en un modelo de 2 Set-up para EF4 syss $O \vDash_{RM2} A$ en ese modelo.

Definición 4.29 (EF4-validez en un modelo de 2 Set-up): Una fbf A es EF4-válida (en símbolos $\vDash_{EF4-RM2} A$) syss $O \vDash_{RM2} A$ en todos los modelos de 2 Set-up para EF4.

Definición 4.30 (EF4-consecuencia semántica en un modelo de 2 Set-ip): Para un conjunto de fbf Γ y una fbf cualquiera A, A es consecuencia semántica de Γ en el modelo M (en símbolos $\Gamma \vDash_{RM2} A$) syss si $O \vDash_{RM2} A$, entonces $O \vDash_{RM2} \Gamma$. ($O \vDash_{RM2} \Gamma$ syss $O \vDash_{RM2} B$ para toda $B \in \Gamma$). Entonces, A es EF4-consecuencia semántica de Γ(en símbolos $\Gamma \vDash_{EF4-RM2} A$), syss $\Gamma \vDash_{RM2} A$ para cada Modelo de 2 Set-up para EF4 M.

Nuestros siguientes pasos consistirán en establecer una proposición acerca de la operación involutiva $*$, dar el Lema de Vinculación y la prueba de corrección.

Proposición 4.31 (Extensión de la operación *): Para cualquier modelo de 2 Set-up para EF4 M y una fbf A, $O* \vDash_{RM2} \neg A$ syss $O \nvDash_{RM2} A$

Prueba:
La prueba resulta inmediata por la Definición 4.27.C5 y el hecho de que $*$ sea una operación involutiva: $O* \vDash_{RM2} \neg A$ syss $O** \nvDash_{RM2} A$ syss $O \nvDash_{RM2} A$. ■

Lema 4.32 (Lema de vinculación): Para cualesquiera fbf A y B, $\vDash_{EF4-RM2} A \to B$ syss, si $a \vDash_{RM2} A$, entonces $a \vDash_{RM2} B$, para todo $a \in K_{RM2}$ en todos los modelos de 2 Set-up para EF4.

Prueba:
Comenzamos probando de izquierda a derecha y luego de derecha a izquierda. Comenzamos por el primer caso:

1. $\vDash_{EF4-RM2} A \to B$	Hipótesis
2. $O \vDash_{RM2} A$	Hipótesis
3. $R_{RM2}OOO$	Definición 4.27
4. $O \vDash_{RM2} B$	Definición 4.27.C4, 1, 2, 3

Continuamos con el segundo caso:

1. $\vDash_{EF4-RM2} A \to B$	Hipótesis
2. $O* \vDash_{RM2} A$	Hipótesis
3. $R_{RM2}OO * O*$	Definición 4.27
4. $O* \vDash_{RM2} B$	Definición 4.27.C4, 1, 2, 3

Así queda probado de izquierda a derecha. Ahora procedemos a la prueba de derecha a izquierda:
Para todo a, x, $y \in K_{RM2}$ en cualquier modelo de 2 Set-up para EF4

1. Si $a \vDash_{RM2} A$, entonces $a \vDash_{RM2} B$	Hipótesis
2. $R_{RM2}Oxy$ y $x \vDash A$	Hipótesis

Han de considerarse dos casos: $R_{RM2}OOO$, $R_{RM2}OO*O*$. Consideramos el primero:

3. $R_{RM2}OOO$	Hipótesis
4. $O \vDash_{RM2} A$	2, 3
5. $O \vDash_{RM2} B$	1, 4

Ahora consideramos el segundo caso:

6. $R_{RM2}OO*O*$	Hipótesis
7. $O* \vDash_{RM2} A$	2, 6
8. $O* \vDash_{RM2} B$	1, 7
9. $\vDash_{EF4-RM2} A \to B$	Definición 4.27.C4, 5, 8

Así queda probado el Lema de vinculación. ■

Teorema 4.33 (Corrección de EF4 respecto del modelo de 2 Set up): Para un conjunto de fbf y una fbf cualesquiera Γ y A respectivamente, si $\Gamma \vdash_{EF4} A$ entonces $\Gamma \vDash_{EF4-RM2} A$

La prueba procede por inducción sobre k, la longitud de la derivación de $\Gamma \vdash_{EF4} A$

(I) Para $k = 1$, A es una de las fbf de Γ y, por tanto, $A \in \Gamma$ y la prueba es trivial. A su vez A puede ser un axioma y hemos de probar que este es válido. Por tanto probamos que todos los axiomas de EF4 son válidos según la semántica que hemos definido.Para estas pruebas suponemos un EF4-modelo arbitrario y procedemos por reductio. Para los axiomas tipo condicional, dado que definimos la EF4-validez con respecto a O, tendremos dos opciones para un axioma cualquiera $A \to B$: Si $O \vDash_{RM2} A$, entonces $O \vDash_{RM2} B$, y si $O* \vDash_{RM2} A$, entonces $O* \vDash_{RM2} B$, por ello daremos primero una opción y luego la segunda. Para los axiomas no condicionales bastará con probar solamente con respecto a O:

(a) A1. $A \to A$

La prueba es inmediata, ya que la propia hipótesis de reductio es contradictoria en si misma al plantear que $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} A$. El segundo caso transcurre de manera similar.

(b) A2. $A \wedge B \to .A/A \wedge B \to .B$

1. $O \vDash_{RM2} A \wedge B$ y $O \nvDash_{RM2} A$	Hipótesis de Reductio
2. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \vDash_{RM2} B$	Definición 4.27.C2, 1

Pero 1 y 2 se contradicen.

1. $O* \vDash_{RM2} A \wedge B$ y $O* \nvDash_{RM2} A$	Hipótesis de Reductio
2. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \vDash_{RM2} B$	Definición 4.27.C2, 1

Pero 1 y 2 se contradicen.

(c) A3. $A \to .A \vee B/B \to .A \vee B$

1. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} A \vee B$	Hipótesis de Reductio
2. $O \nvDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B$	Definición 4.27.C3, 1

Pero 1 y 2 se contradicen.

1. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} A \vee B$	Hipótesis de Reductio
2. $O* \nvDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$	Definición 4.27.C3, 1

Pero 1 y 2 se contradicen.

(d) A4. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to .A \to B \wedge C$

1. $O \vDash_{RM2} (A \to B) \wedge (A \to C)$ y $O \nvDash_{RM2} A \to .B \wedge C$ — Hipótesis de Reductio

Tenemos dos posibilidades: $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B \wedge C$, y $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B \wedge C$. Procedemos con la primera:

2. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B \wedge C$	Definición 4.27.C4, 1
3. $O \vDash_{RM2} A \to B$ y $O \vDash_{RM2} A \to C$	Definición 4.27.C2, 1
4. $O \vDash_{RM2} B$	$R_{RM2}OOO$, 2, 3
5. $O \vDash_{RM2} C$	$R_{RM2}OOO$, 2, 3
6.$O \vDash_{RM2} B \wedge C$	Definición 4.27.C2, 4, 5

Pero 2 y 6 se contradicen, luego procedemos con la segunda opción:

7. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B \wedge C$	Definición 4.27.C4, 1
8. $O* \vDash_{RM2} B$	$R_{RM2}OO*O*$, 3, 7
9. $O* \vDash_{RM2} C$	$R_{RM2}OO*O*$, 3, 7
10. $O* \vDash_{RM2} B \wedge C$	Definición 4.27.C2, 8, 9

Pero 7 y 10 se contradicen.

1. $O* \vDash_{RM2} (A \to B) \wedge (A \to C)$ y $O* \nvDash_{RM2} A \to .B \wedge C$ — Hipótesis de Reductio

Tenemos tres posibilidades $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B \wedge C$, $O \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B \wedge C$, y $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B \wedge C$. Procedemos con la primera:

2. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B \wedge C$	Definición 4.27.C4, 1
3. $O* \vDash_{RM2} A \to B$ y $O* \vDash_{RM2} A \to C$	Definición 4.27.C2, 1
4. $O* \vDash_{RM2} B$	$R_{RM2}O*O*O*$, 2, 3
5. $O* \vDash_{RM2} C$	$R_{RM2}O*O*O*$, 2, 3
6. $O* \vDash_{RM2} B \wedge C$	Definición 4.27.C2, 4, 5

Pero 2 y 6 se contradicen. Continuamos con la segunda opción:

7. $O \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B \wedge C$	Definición 4.27.C4, 1
8. $O* \vDash_{RM2} B$	$R_{RM2}O*OO*$, 3, 7
9. $O* \vDash_{RM2} C$	$R_{RM2}O*OO*$, 3, 7
10. $O* \vDash_{RM2} B \wedge C$	Definición 4.27.C2, 8, 9

Pero 7 y 10 se contradicen. Procedemos con la última posibilidad:

11. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash B \wedge C$ Definición 4.27.C4, 1
12. $O \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * OO$, 3, 11
13. $O \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}O * OO$, 3, 11
14. $O \vDash_{RM2} B \wedge C$ Definición 4.27.C2, 12, 13

Pero 11 y 14 se contradicen.

(e) A5. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to .(A \vee B) \to C$

1. $O \vDash_{RM2} (A \to C) \wedge (B \to C)$ y Hipótesis de Reductio
$O \nvDash_{RM2} A \vee B \to .C$
Tenemos 2 opciones distintas: $O \vDash_{RM2} A \vee B$ y $O \nvDash_{RM2} C$,
$O* \vDash_{RM2} A \vee B$ y $O* \nvDash_{RM2} C$. Consideramos la primera:
2. $O \vDash_{RM2} A \vee B$ y $O \nvDash_{RM2} C$ Definición 4.27.C4, 1
3. $O \vDash_{RM2} A \to C$ y $O \vDash_{RM2} B \to C$ Definición 4.27.C2, 1
A partir de 2 tenemos dos posibilidades: $O \vDash_{RM2} A$ ó
$O \vDash_{RM2} B$. Consideramos la primera:
4. $O \vDash_{RM2} A$ Definición 4.27.C3, 2
5. $O \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}OOO$, 3, 4
Pero 2 y 5 se contradicen. Consideramos, pues, la segunda
opción derivada de la disyunción:
6. $O \vDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C3, 2
7. $O \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}OOO$, 3, 6
Pero 2 y 7 se contradicen. Consideramos ahora la segunda
opción derivada del condicional:
8. $O* \vDash_{RM2} A \vee B$ y $O* \nvDash_{RM2} C$ Definición 4.27.C4, 1
Desde 8 tenemos dos posibilidades derivadas de la disyunción,
$O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \vDash_{RM2} B$. Consideramos la primera:
9. $O* \vDash_{RM2} A$ Definición 4.27.C3, 8
10. $O* \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}OO * O*$, 3, 9
Pero 8 y 10 se contradicen. Tenemos en cuenta la segunda opción:
11. $O* \vDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C3, 8
12. $O* \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}OO * O*$, 3, 11

Pero 8 y 12 se contradicen.

1. $O* \vDash_{RM2} (A \to C) \wedge (B \to C)$ y Hipótesis de Reductio
$O* \nvDash_{RM2} A \vee B \to .C$
Tenemos 3 opciones desde el condicional: $O* \vDash_{RM2} A \vee B$ y
$O* \nvDash_{RM2} C$, $O \vDash_{RM2} A \vee B$ y $O* \nvDash_{RM2} C$, y $O \vDash_{RM2} A \vee B$ y
$O \nvDash_{RM2} C$. Trabajamos con la primera:
2. $O* \vDash_{RM2} A \vee B$ y $O* \nvDash_{RM2} C$ Definición 4.27.C4, 1
3. $O* \vDash_{RM2} A \to C$ y $O* \vDash B \to C$ Definición 4.27.C2, 1
A partir de 2 tenemos dos posibilidades derivadas de la
disyunción: $O* \vDash_{RM2} A$ ó $O* \vDash_{RM2} B$. Consideramos la primera:
4. $O* \vDash_{RM2} A$ Definición 4.27.C3, 2

5. $O* \vDash_{RM2} C$ $\qquad$ $R_{RM2} O * O * O*$, 3, 4
Pero 2 y 5 se contradicen. Consideramos, pues, la segunda opción:
6. $O* \vDash_{RM2} B$ $\qquad$ Definición 4.27.C3, 2
7. $O* \vDash_{RM2} C$ $\qquad$ $R_{RM2} O * O * O*$, 3, 6
Pero 2 y 7 se contradicen. Procedemos, pues, con la segunda opción del condicional:
8. $O \vDash_{RM2} A \vee B$ y $O* \nvDash_{RM2} C$ $\qquad$ Definición 4.27.C4, 1
Desde esta nueva disyunción tenemos dos opciones. Probamos con la primera:
9. $O \vDash_{RM2} A$ $\qquad$ Definición 4.27.C3, 8
10. $O* \vDash_{RM2} C$ $\qquad$ $R_{RM2} O * OO*$, 3, 9
Pero 8 y 10 se contradicen. Pasamos a la segunda opción de la disyunción:
11. $O \vDash_{RM2} B$ $\qquad$ Definición 4.27.C3, 8
12. $O* \vDash_{RM2} C$ $\qquad$ $R_{RM2} O * OO*$, 3, 11
Pero 8 y 12 se contradicen. Trabajamos con la última opción del condicional:
13. $O \vDash_{RM2} A \vee B$ y $O \nvDash_{RM2} C$ $\qquad$ Definición 4.27.C4, 1
Tenemos dos opciones desde esta nueva disyunción. Procedemos con la primera:
14. $O \vDash_{RM2} A$ $\qquad$ Definición 4.27.C3, 13
15. $O \vDash_{RM2} C$ $\qquad$ $R_{RM2} O * OO$, 3, 14
Pero 13 y 15 se contradicen. Procedemos con la segunda opción:
16. $O \vDash_{RM2} B$ $\qquad$ Definición 4.27.C3, 13
17. $O \vDash_{RM2} C$ $\qquad$ $R_{RM2} O * OO$, 3, 16

Pero 13 y 17 se contradicen.

(f) A6. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow . (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

1. $O \vDash_{RM2} A \wedge (B \vee C)$ y $O \nvDash_{RM2} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\qquad$ Hipótesis de Reductio
2. $O \nvDash_{RM2} A \wedge B$ y $O \nvDash_{RM2} A \wedge C$ $\qquad$ Definición 4.27.C3, 1
3. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \vDash_{RM2} B \vee C$ $\qquad$ Definición 4.27.C2, 1
Desde 2 se nos presentan dos opciones por cada conjunción, pero de ambas hemos de rechazar $O \nvDash_{RM2} A$ ya que produce una contradicción con 3. Con lo cual consideramos las otras opciones:
4. $O \nvDash_{RM2} B$ y $O \nvDash_{RM2} C$ $\qquad$ Definición 4.27.C2, 2
5.$O \nvDash_{RM2} B \vee C$ $\qquad$ Definición 4.27.C3, 4

Pero 3 y 5 se contradicen.

1. $O* \vDash_{RM2} A \wedge (B \vee C)$ y $O* \nvDash_{RM2} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\qquad$ Hipótesis de Reductio
2. $O* \nvDash_{RM2} A \wedge B$ y $O* \nvDash_{RM2} A \wedge C$ $\qquad$ Definición 4.27.C3, 1
3. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \vDash_{RM2} B \vee C$ $\qquad$ Definición 4.27.C2, 1

Desde 2 se nos presentan dos opciones por cada conjunción, pero de ambas hemos de rechazar $O{*} \nvDash A$ ya que produce una contradicción con 3. Con lo cual consideramos las otras opciones:

4. $O{*} \nvDash_{RM2} B$ y $O{*} \nvDash_{RM2} C$ — Definición 4.27.C2, 2
5. $O{*} \nvDash_{RM2} B \vee C$ — Definición 4.27.C3, 4

Pero 3 y 5 se contradicen.

(g) A7. $A \rightarrow B \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

1. $O \vDash_{RM2} A \rightarrow B$ y — Hipótesis de Reductio
$O \nvDash_{RM2} B \rightarrow C \rightarrow .A \rightarrow C$

Existen 2 posibilidades a partir del condicional: $O \vDash_{RM2} B \rightarrow C$ y $O \nvDash_{RM2} A \rightarrow C$, y $O{*} \vDash_{RM2} B \rightarrow C$ y $O{*} \nvDash_{RM2} A \rightarrow C$. Procedemos con la primera:

2. $O \vDash_{RM2} B \rightarrow C$ y $O \nvDash_{RM2} A \rightarrow C$ — Definición 4.27.C4, 1

Desde este condicional volvemos a tener 2 posibilidades distintas: $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} C$, y $O{*} \vDash_{RM2} A$ y $O{*} \nvDash_{RM2} C$. Tenemos en cuenta la primera:

3. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} C$ — Definición 4.27.C4, 2
4. $O \vDash_{RM2} B$ — $R_{RM2}OOO$, 1, 3
5. $O \vDash_{RM2} C$ — $R_{RM2}OOO$, 2, 4

Pero 3 y 5 se contradicen. Procedemos con la segunda opción del segundo condicional:

6. $O{*} \vDash_{RM2} A$ y $O{*} \nvDash_{RM2} C$ — Definición 4.27.C4, 2
7. $O{*} \vDash_{RM2} B$ — $R_{RM2}OO*O*$, 1, 6
8. $O{*} \vDash_{RM2} C$ — $R_{RM2}OO*O*$, 2, 7

Pero 6 y 8 se contradicen. Probamos ahora la segunda opción del primer condicional:

9. $O{*} \vDash_{RM2} B \rightarrow C$ y $O{*} \nvDash_{RM2} A \rightarrow C$ — Definición 4.27.C4, 1

Desde este tercer condicional tenemos 3 opciones diferentes: $O{*} \vDash_{RM2} A$ y $O{*} \nvDash_{RM2} C$, $O \vDash_{RM2} A$ y $O{*} \nvDash_{RM2} C$, y $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} C$. Procedemos con la primera:

10. $O{*} \vDash_{RM2} A$ y $O{*} \nvDash_{RM2} C$ — Definición 4.27.C4, 9
11. $O{*} \vDash_{RM2} B$ — $R_{RM2}OO*O*$, 1, 10
12. $O{*} \vDash_{RM2} C$ — $R_{RM2}OO*O*$, 9, 11

Pero 10 y 12 se contradicen. Probamos la segunda opción del tercer condicional:

13. $O \vDash_{RM2} A$ y $O{*} \nvDash_{RM2} C$ — Definición 4.27.C4, 9
14. $O \vDash_{RM2} B$ — $R_{RM2}OOO$, 1 ,13
15. $O{*} \vDash_{RM2} C$ — $R_{RM2}O*OO*$, 9, 14

Pero 13 y 15 se contradicen. Continuamos con la tercera opción:

16. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} C$ — Definición 4.27.C4, 9
17. $O \vDash_{RM2} B$ — $R_{RM2}OOO$, 1, 16
18. $O \vDash_{RM2} C$ — $R_{RM2}O*OO$, 9, 17

Pero 16 y 18 se contradicen.

1. $O* \vDash_{RM2} A \to B$ y $O* \nvDash_{RM2} B \to C \to .A \to C$ Hipótesis de Reductio
Desde el condicional tenemos 3 opciones distintas: $O* \vDash_{RM2} B \to C$ y $O* \nvDash_{RM2} A \to C$, $O \vDash_{RM2} B \to C$ y $O* \nvDash_{RM2} A \to C$, y $O \vDash_{RM2} B \to C$ y $O \nvDash_{RM2} A \to C$. Procedemos con la primera
2. $O* \vDash_{RM2} B \to C$ y $O* \nvDash_{RM2} A \to C$ Definición 4.27.C4, 1
En este segundo condicional volvemos a tener 3 opciones: $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} C$, $O \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} C$, y $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} C$. Consideramos la primera de estas 3:
3. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} C$ Definición 4.27.C4, 2
4. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * O * O*$, 1, 3
5. $O* \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}O * O * O*$, 2, 4
Pero 3 y 5 se contradicen. Procedemos con la segunda instancia del segundo condicional:
6. $O \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} C$ Definición 4.27.C4, 2
7. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * OO*$, 1, 6
8. $O* \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}O * O * O*$, 2, 7
Pero 6 y 8 se contradicen. Probamos con la tercera opción disponible:
9. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} C$ Definición 4.27.C4, 2
10. $O \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * OO$, 1, 9
11. $O \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}O * OO$, 2, 10
Pero 9 y 11 se contradicen. Procedemos con la segunda opción del primer condicional:
12. $O \vDash_{RM2} B \to C$ y $O* \nvDash_{RM2} A \to C$ Definición 4.27.C4, 1
Este tercer condicional aporta otras 3 opciones: $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} C$, $O \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} C$, y $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} C$. Procedemos con la primera:
13. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} C$ Definición 4.27.C4, 12
14. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * O * O*$, 1, 13
15. $O* \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}O * O * O*$, 12, 14
Pero 13 y 15 se contradicen. Procedemos con la segunda opción:
16. $O \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} C$ Definición 4.27.C4, 12
17. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * OO*$, 1, 16
18. $O* \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}OO * O*$,12, 17
Pero 16 y 18 se contradicen. Probamos la tercera instancia:
19. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} C$ Definición 4.27.C4, 12
20. $O \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * OO$, 1, 19
21. $O \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}OOO$, 12, 20
Pero 19 y 21 se contradicen. Continuamos con la tercera opción del primer condicional:
22. $O \vDash_{RM2} B \to C$ y $O \nvDash_{RM2} A \to C$ Definición 4.27.C4, 1
Este condicional genera dos opciones: $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} C$, y $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} C$. Consideramos la primera:
23. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} C$ Definición 4.27.C4, 22

24. $O \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O*OO$, 1, 23
25. $O \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}OOO$, 22, 24
Pero 23 y 25 se contradicen. Probamos la segunda opción:
26. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash C$ Definición 4.27.C4, 22
27. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O*O*O*$, 1, 26
28. $O* \vDash_{RM2} C$ $R_{RM2}OO*O*$, 22, 27

Pero 26 y 28 se contradicen.

(h) A8. $A \to B \to .(C \to A) \to (C \to B)$

1. $O \vDash_{RM2} A \to B$ y Hipótesis de Reductio
$O \nvDash_{RM2} C \to A \to .C \to B$
Desde este primer condicional tenemos 2 posibilidades: $O \vDash_{RM2} C \to A$ y $O \nvDash_{RM2} C \to B$, y $O* \vDash_{RM2} C \to A$ y $O* \nvDash_{RM2} C \to B$. Procedemos con la primera:
2. $O \vDash_{RM2} C \to A$ y $O \nvDash_{RM2} C \to B$ Definición 4.27.C4, 1
Tenemos ahora, de nuevo, 2 posibilidades desde este segundo condicional: $O \vDash_{RM2} C$ y $O \nvDash_{RM2} B$, y $O* \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$.
Continuamos con la primera:
3. $O \vDash_{RM2} C$ y $O \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 2
4. $O \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}OOO$, 2, 3
5. $O \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}OOO$, 1, 4
Pero 3 y 5 se contradicen. Procedemos, pues, con la segunda opción del segundo condicional:
6. $O* \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 2
7. $O* \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}OO*O*$, 2, 6
8. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}OO*O*$, 1, 7
Pero 6 y 8 se contradicen. Proseguimos con la segunda opción del primer condicional:
9. $O* \vDash_{RM2} C \to A$ y $O* \nvDash_{RM2} C \to B$ Definición 4.27.C4, 1
Tenemos 3 opciones desde este tercer condicional: $O* \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$, $O \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$, y $O \vDash_{RM2} C$ y $O \nvDash_{RM2} B$.
Utilizamos la primera de ellas:
10. $O* \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 9
11. $O* \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}O*O*O*$, 9, 10
12. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}OO*O*$, 1, 11
Pero 10 y 12 se contradicen. Probamos con la segunda opción del tercer condicional:
13. $O \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 9
14. $O* \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}O*OO*$, 9, 13
15. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}OO*O*$, 1, 14
Pero 13 y 15 se contradicen. Procedemos con la tercera y última opción del tercer condicional:
16. $O \vDash_{RM2} C$ y $O \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 9
17. $O \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}O*OO$, 9, 16

18. $O \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}OOO$, 1, 17

Pero 16 y 18 se contradicen.

1. $O* \vDash_{RM2} A \to B$ y Hipótesis de Reductio
$O* \nvDash_{RM2} C \to A \to .C \to B$
Desde este primer condicional tenemos 3 opciones: $O* \vDash_{RM2} C \to A$ y $O* \nvDash_{RM2} C \to B$, $O \vDash_{RM2} C \to A$ y $O* \nvDash_{RM2} C \to B$, y $O \vDash_{RM2} C \to A$ y $O \nvDash_{RM2} C \to B$. Probamos con la primera:
2. $O* \vDash_{RM2} C \to A$ y $O* \nvDash_{RM2} C \to B$ Definición 4.27.C4, 1
Volvemos a tener, de nuevo, 3 opciones desde este segundo condicional: $O* \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$, $O \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$, y $O \vDash_{RM2} C$ y $O \nvDash_{RM2} B$. Procedemos con la primera:
3. $O* \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 2
4. $O* \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}O * O * O*$, 2, 3
5. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * O * O*$, 1, 4
Pero 3 y 5 se contradicen. Probamos ahora con la segunda opción del segundo condicional:
6. $O \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 2
7. $O* \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}O * OO*$, 2, 6
8. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * O * O*$, 1, 7
Pero 6 y 8 se contradicen. Continuamos con la tercera opción del segundo condicional:
9. $O \vDash_{RM2} C$ y $O \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 2
10. $O \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}O * OO$, 2, 9
11. $O \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * OO$, 1, 10
Pero 9 y 11 se contradicen. Ahora continuamos con la segunda opción del primer condicional:
12. $O \vDash_{RM2} C \to A$ y $O* \nvDash C \to B$ Definición 4.27.C4, 1
Volvemos a tener de nuevo 3 opciones desde este tercer condicional: $O* \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$, $O \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$, y $O \vDash_{RM2} C$ y $O \nvDash_{RM2} B$. Probamos con la primera:
13. $O* \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 12
14. $O* \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}OO * O*$, 12, 13
15. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * O * O*$, 1, 14
Pero 13 y 15 se contradicen. Proseguimos con la segunda opción del tercer condicional:
16. $O \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 12
17. $O \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}OOO$, 12, 16
18. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * OO*$, 1, 17
Pero 16 y 18 se contradicen. Procedemos con la tercera opción del tercer condicional:
19. $O \vDash_{RM2} C$ y $O \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 12
20. $O \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}OOO$, 12, 19
21. $O \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * OO$, 1, 20

Pero 19 y 21 se contradicen. Probamos, por último, la tercera opción del primer condicional:
22. $O \vDash_{RM2} C \to A$ y $O \nvDash_{RM2} C \to B$ Definición 4.27.C4, 1
En este cuarto condicional tenemos dos opciones: $O \vDash_{RM2} C$ y $O \nvDash_{RM2} B$, y $O* \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$. Procedemos con la primera:
23. $O \vDash_{RM2} C$ y $O \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 22
24. $O \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}OOO$, 22, 23
25. $O \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * OO$, 1, 24
Pero 23 y 25 se contradicen. Probamos la segunda opción del cuarto condicional:
26. $O* \vDash_{RM2} C$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 22
27. $O* \vDash_{RM2} A$ $R_{RM2}OO * O*$, 22, 26
28. $O* \vDash_{RM2} B$ $R_{RM2}O * O * O*$, 1, 27

Pero 26 y 28 se contradicen.

(i) A9. $A \to \neg B \to .B \to \neg A$

1. $O \vDash_{RM2} A \to \neg B$ y $O \nvDash_{RM2} B \to \neg A$ Hipótesis de Reductio
Existen 2 opciones: $O \vDash_{RM2} B$ y $O \nvDash_{RM2} \neg A$, y $O* \vDash_{RM2} B$ y $O* \nvDash_{RM2} \neg A$. Procedemos con la primera:
2. $O \vDash_{RM2} B$ y $O \nvDash_{RM2} \neg A$ Definición 4.27.C4, 1
3. $O* \vDash_{RM2} A$ Definición 4.27.C5, 2
4. $O* \vDash_{RM2} \neg B$ $R_{RM2}OO * O*$, 1, 3
5. $O \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C5, 4
Pero 2 y 5 se contradicen. Continuamos con la segunda opción:
6. $O* \vDash_{RM2} B$ y $O* \nvDash_{RM2} \neg A$ Definición 4.27.C4, 1
7. $O \vDash_{RM2} A$ Definición 4.27.C5, 6
8. $O \vDash_{RM2} \neg B$ $R_{RM2}OOO$, 1, 7
9. $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C5, 8

Pero 6 y 9 se contradicen.

1. $O* \vDash_{RM2} A \to \neg B$ y $O* \nvDash_{RM2} B \to \neg A$ Hipótesis de Reductio
Tenemos 3 opciones distintas: $O* \vDash_{RM2} B$ y $O* \nvDash \neg A$, $O \vDash_{RM2} B$ y $O* \nvDash_{RM2} \neg A$, y $O \vDash_{RM2} B$ y $O \nvDash_{RM2} \neg A$
2. $O* \vDash_{RM2} B$ y $O* \nvDash_{RM2} \neg A$ Definición 4.27.C4, 1
3. $O \vDash_{RM2} A$ Definición 4.27.C5, 2
4. $O \vDash_{RM2} \neg B$ $R_{RM2}O * OO$, 1, 3
5. $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C5, 4
Pero 2 y 5 se contradicen. Continuamos con la segunda opción:
6. $O \vDash_{RM2} B$ y $O* \nvDash_{RM2} \neg A$ Definición 4.27.C4, 1
7. $O \vDash_{RM2} A$ Definición 4.27.C5, 6
8. $O* \vDash_{RM2} \neg B$ $R_{RM2}O * OO*$, 1, 7
9. $O \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C5, 8
Pero 6 y 9 se contradicen. Procedemos con la tercera y última opción:

10. $O \models_{RM2} B$ y $O \not\models_{RM2} \neg A$ — Definición 4.27.C4, 1
11. $O* \models_{RM2} A$ — Definición 4.27.C5, 10
12. $O* \models_{RM2} \neg B$ — $R_{RM2}O * O * O*$, 1, 11
13. $O \not\models_{RM2} B$ — Definición 4.27.C5, 12

Pero 10 y 13 se contradicen.

(j) A10. $\neg\neg A \to A$

1. $O \models_{RM2} \neg\neg A$ y $O \not\models_{RM2} A$ — Hipótesis de Reductio
2. $O* \not\models_{RM2} \neg A$ — Definición 4.27.C5, 1
3. $O ** \models_{RM2} A$ — Definición 4.27.C5, 2
4. $O \models_{RM2} A$ — Definición 4.27, 3

Pero 1 y 4 se contradicen.

1. $O* \models_{RM2} \neg\neg A$ y $O* \not\models_{RM2} A$ — Hipótesis de Reductio
2. $O \models_{RM2} \neg A$ — Definición 4.27.C5, 1
3. $O* \not\models_{RM2} \neg\neg A$ — Definición 4.27.C5, 2

Pero 1 y 3 se contradicen.

(k) A11. $A \to (A \to B) \to. A \to B$

1. $O \models_{RM2} A \to. A \to B$ y $O \not\models_{RM2} A \to B$ — Hipótesis de Reductio
Tenemos 2 opciones distintas: $O \models_{RM2} A$ y $O \not\models_{RM2} B$, y $O* \models_{RM2} A$ y $O* \not\models_{RM2} B$. Procedemos con la primera:
2. $O \models_{RM2} A$ y $O \not\models B$ — Definición 4.27.C4, 1
3. $O \models_{RM2} A \to B$ — $R_{RM2}OOO$, 1, 2
Pero 1 y 3 se contradicen. Proseguimos con la segunda opción:
4. $O* \models_{RM2} A$ y $O* \not\models B$ — Definición 4.27.C4, 1
5. $O* \models_{RM2} A \to B$ — $R_{RM2}OO * O*$, 1, 4
6. $O* \models_{RM2} B$ — $R_{RM2}O * O * O*$, 4, 5

Pero 4 y 6 se contradicen.

1. $O* \models_{RM2} A \to .A \to B$ y $O* \not\models_{RM2} A \to B$ — Hipótesis de Reductio
Tenemos 3 opciones distintas: $O* \models_{RM2} A$ y $O* \not\models_{RM2} B$, $O \models_{RM2} A$ y $O* \not\models_{RM2} B$, y $O \models_{RM2} A$ y $O \not\models_{RM2} B$. Procedemos con la primera:
2. $O* \models_{RM2} A$ y $O* \not\models_{RM2} B$ — Definición 4.27.C4, 1
3. $O* \models_{RM2} A \to B$ — $R_{RM2}O * O * O*$, 1, 2
Pero 1 y 3 se contradicen. Proseguimos con la segunda opción:
4. $O \models_{RM2} A$ y $O* \not\models_{RM2} B$ — Definición 4.27.C4, 1
5. $O* \models_{RM2} A \to B$ — $R_{RM2}O * OO*$, 1, 4
Pero 1 y 5 se contradicen. Probamos con la tercera y última opción:
6. $O \models_{RM2} A$ y $O \not\models_{RM2} B$ — Definición 4.27.C4, 1

7. $O* \vDash_{RM2} A \to B$ $\quad$ $R_{RM2}O * OO*$, 1, 6

Pero 1 y 7 se contradicen.

(l) A12. $[(A \to A) \wedge (B \to B)] \to C \to . C$

1. $O \vDash_{RM2} (A \to A) \wedge (B \to B) \to . C$ y $O \nvDash_{RM2} C$ $\quad$ Hipótesis de Reductio

Sabemos que, necesariamente, $O \vDash_{RM2} A \to A$, ya que si $O \nvDash_{RM2} A \to A$, entonces o bien $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} A$ ó $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} A$, contradictorios ambos. Lo mismo ocurre para $O \vDash_{RM2} B \to B$.

2. $O \vDash_{RM2} A \to A$ $\quad$ Hipótesis
3. $O \vDash_{RM2} B \to B$ $\quad$ Hipótesis
4. $O \vDash_{RM2} (A \to A) \wedge (B \to B)$ $\quad$ Definición 4.27.C2, 2, 3
5. $O \vDash_{RM2} C$ $\quad$ $R_{RM2}OOO$, 1, 4

Pero 1 y 5 se contradicen.

1. $O* \vDash_{RM2} (A \to A) \wedge (B \to B) \to . C$ y $O* \nvDash_{RM2} C$ $\quad$ Hipótesis de Reductio

Sabemos que, necesariamente, $O \vDash_{RM2} A \to A$, ya que si $O \nvDash_{RM2} A \to A$, entonces o bien $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} A$ ó $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} A$, contradictorios ambos. Lo mismo ocurre para $O \vDash_{RM2} B \to B$.

2. $O \vDash_{RM2} A \to A$ $\quad$ Hipótesis
3. $O \vDash_{RM2} B \to B$ $\quad$ Hipótesis
4. $O \vDash_{RM2} (A \to A) \wedge (B \to B)$ $\quad$ Definición 4.27.C2, 2, 3
5. $O* \vDash_{RM2} C$ $\quad$ $R_{RM2}O * OO*$, 1, 4

Pero 1 y 5 se contradicen.

(m) A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$:

1. $O \nvDash_{RM2} (A \vee \neg B) \vee (A \to B)$ $\quad$ Hipótesis de Reductio
2. $O \nvDash_{RM2} A \vee \neg B$ y $O \nvDash_{RM2} A \to B$ $\quad$ Definición 4.27.C3, 1
3. $O \nvDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} \neg B$ $\quad$ Definición 4.27.C3, 2

Existen 2 opciones ahora: $O \nvDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} \neg B$, y $O* \nvDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash \neg B$. Procedemos con la primera:

4. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B$ $\quad$ Definición 4.27.C4, 2

Pero 3 y 4 se contradicen. Proseguimos con la segunda posibilidad:

5. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ $\quad$ Definición 4.27.C4, 2
6. $O \vDash_{RM2} \neg B$ $\quad$ Definición 4.27.C5, 5

Pero 3 y 6 se contradicen.

(n) A14. $B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow . \neg B$:

1. $O \vDash_{RM2} B \wedge \neg (A \rightarrow B)$ y $O \nvDash_{RM2} \neg B$ Hipótesis de Reductio
2. $O \vDash_{RM2} B$ y $O \vDash_{RM2} \neg (A \rightarrow B)$ Definición 4.27.C2, 1
3. $O* \nvDash_{RM2} A \rightarrow B$ Definición 4.27.C5, 2

En este momento tenemos 3 opciones: $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$, $O \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$, y $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B$. Procedemos con la primera:

4. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 3
5. $O \vDash_{RM2} \neg B$ Definición 4.27.C5, 4

Pero 1 y 5 se contradicen. Proseguimos con la segunda opción:

6. $O \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 3
7. $O \vDash_{RM2} \neg B$ Definición 4.27.C5, 6

Pero 1 y 7 se contradicen. Probamos la última opción:

8. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 3

Pero 2 y 8 se contradicen.

1. $O* \vDash_{RM2} B \wedge \neg (A \rightarrow B)$ y $O* \nvDash_{RM2} \neg B$ Hipótesis de Reductio
2. $O* \vDash_{RM2} B$ y $O* \vDash_{RM2} \neg (A \rightarrow B)$ Definición 4.27.C2, 1
3. $O \nvDash_{RM2} A \rightarrow B$ Definición 4.27.C5, 2

Existen 2 opciones distintas: $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B$, y $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash B$. Procedemos con la primera:

4. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 3
5. $O* \vDash_{RM2} \neg B$ Definición 4.27.C5, 4

Pero 1 y 5 se contradicen. Proseguimos con la segunda opción:

6. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 3

Pero 2 y 6 se contradicen.

(o) A15. $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow . A \vee \neg B$:

1. $O \vDash_{RM2} \neg (A \rightarrow B)$ y $O \nvDash_{RM2} A \vee \neg B$ Hipótesis de Reductio
2. $O \nvDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} \neg B$ Definición 4.27.C3, 1
3. $O* \vDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C5, 2
4. $O* \nvDash_{RM2} A \rightarrow B$ Definición 4.27.C5, 1

Existen 3 posibilidades: $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$, $O \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$, y $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B$. Comenzamos con la primera opción:

5. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 4

Pero 3 y 5 se contradicen. Continuamos con la segunda opción:

6. $O \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 4

Pero 3 y 6 se contradicen. Probamos la última opción:

7. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 4

Pero 2 y 7 se contradicen.

1. $O* \vDash_{RM2} \neg(A \to B)$ y $O* \nvDash_{RM2} A \vee \neg B$ Hipótesis de Reductio
2. $O* \nvDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} \neg B$ Definición 4.27.C3, 1
3. $O \vDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C5, 2
4. $O \nvDash_{RM2} A \to B$ Definición 4.27.C5, 1

Existen 2 posibilidades distintas: $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B$, y $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$. Probamos la primera:

5. $O \vDash_{RM2} A$ y $O \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 4

Pero 3 y 5 se contradicen. Probamos, entonces, la segunda:

6. $O* \vDash_{RM2} A$ y $O* \nvDash_{RM2} B$ Definición 4.27.C4, 4

Pero 2 y 6 se contradicen.

(II) Para $k \leq n$, donde $n \in \mathbb{N}$, asumimos la hipótesis de inducción

(III) Para $k = n + 1$, A puede, o bien ser un axioma, o bien haber sido derivada a través de una de las reglas del sistema. Para el caso en que A sea un axioma nos remitimos a (I). Por tanto únicamente hemos de probar que las reglas de EF4 preservan la validez. Tenemos un subcaso para cada una de las diferentes reglas:

(a) Si A ha sido derivada por R1, Adjunción, la prueba es trivial

(b) Si A ha sido derivada por R2, Modus Ponens, entonces hemos de suponer que $\Gamma \vDash_{EF4-RM2} B \to A$ y $\Gamma \vDash_{EF4-RM2} B$. Adicionalmente suponemos que $O \vDash \Gamma$, lo que nos permite obtener $O \vDash_{EF4-RM2} B \to A$ y $O \vDash_{EF4-RM2} B$. Por $R_{RM2}OOO$, y los dos resultados inmediatamente anteriores, tenemos $O \vDash_{EF4-RM2} A$, tal y como pretendíamos.

(c) Si A ha sido derivada por R3, Contraejemplo Disyuntivo, entonces A tiene la forma $D \vee \neg(B \to C)$, con lo cual asumimos que $\Gamma \vDash_{EF4-RM2} D \vee B$, $\Gamma \vDash_{EF4-RM2} D \vee \neg C$ y $O \vDash_{RM2} \Gamma$. Entonces podemos concluir que $O \vDash_{EF4-RM2} D \vee B$ y$O \vDash_{EF4-RM2} D \vee \neg C$. Suponemos como Hipótesis de Reductio que $O \nvDash_{EF4-RM2} D \vee \neg(B \to C)$, y de aquí se sigue fácilmente $O \nvDash_{EF4-RM2} D$ y $O \nvDash_{EF4-RM2} \neg(B \to C)$. De estos dos resultados, el primero nos proporciona, junto a las hipótesis principales $O \vDash_{EF4-RM2} B$ y $O \vDash_{EF4-RM2} \neg C$, mientras que desde el segundo obtenemos $O* \vDash_{EF4-RM2} B \to C$. Por $R_{RM2}O*OO*$y los últimos resultados tenemos $O* \vDash_{EF4-RM2} C$, que a su vez genera $O \nvDash_{EF4-RM2} \neg C$ que produce una contradicción.

Queda así probado el Teorema de corrección.
■

2.2 Completud de EF4 con respecto del modelo de 2 set-up

Para dar la prueba de completud respecto a la semántica de 2 Set-up haremos uso de los Lemas 2.37 y 2.38, Lemas de extensión y primacía respectivamente.

Además de ello nos apoyaremos en los conceptos ya desarrollados en las Definiciones 4.9, 2.24 y 2.39, el concepto de teoría, clases de teorías y conjunto de consecuencias de un conjunto dado respectivamente; También aprovecharemos el hecho de que el conjunto de consecuencias sea normal, tal y como se establece en la Observación 2.40. De manera complementaria daremos las siguientes nociones previas al teorema de completud.

Proposición 4.34 (La construcción de T): Sea Γ un conjunto de fbf y A una fbf tal que $\Gamma \nvDash_{EF4} A$. Entonces existe una teoría normal y prima tal que $\Gamma \subseteq T$ y $A \notin \Gamma$y además, T se encuentra cerrada por todas las reglas de la lógica.

Prueba:

Supóngase $\Gamma \nvDash_{EF4} A$ para Γ y A arbitrarios. Entonces $A \notin Cn[EF4]$. Por la Observación 2.40 $Cn[EF4]$ es un teoría normal. Por los Lemas 2.37 y 2.38 hay una teoría prima y normal T tal que $Cn[EF4] \subseteq T$ y $A \notin T$. Así, $\Gamma \subseteq T$ y $A \notin T$, dado que $\Gamma \subseteq Cn[EF4]$, tal y como se requería. Por último, T está cerrada por las reglas de la lógica también por la aplicación del Lema 2.37.

■

Tras esto, el modelo canónico para la semántica de 2 Set-up para EF4 se construye sobre T tal y como sigue:

Definición 4.35 (R^P_{RM2}, $*^P$ y $\vDash^P_{RM2}$): Sea K^P_{RM2} el conjunto de todas la teorías primas. Entonces R^P_{RM2}, $*^P$ y $\vDash^P_{RM2}$ se definen como sigue para todo a, b, $c \in K^P_{RM2}$ y fbf A, B:

(I) $R^P_{RM2}abc$ syss $A \rightarrow B \in a$ y $A \in b \Rightarrow B \in c$;

(II) $a{*}^P = \{A | \neg A \notin a\}$

(III) $a \vDash^P_{RM2} A$ syss $A \in a$.

Proposición 4.36 ($*^P$ es una operación en K^P_{RM2}): (I) Sea a una teoría prima. Entonces $a{*}^P$ es una teoría prima también. (II) Para cualquier fbf A, $\neg A \in a{*}^P$ syss $A \notin a$.

Prueba:

(I) $a{*}^P$ está cerrado por EF4-implicación por el teorema de Contraposición (II), cerrada por Adjunción por De Morgan (V), y es prima por De Morgan (II).

(II) Se prueba por A10 y su teorema contrapartida, Doble Negación (II)

■

Ahora podemos definir el modelo canónico:

Definición 4.37 (Modelo canónico de 2 Set-up para EF4): El modelo canónico de 2 Set-up para EF4 es la estructura (K^c_{RM2}, $*^c$, R^c_{RM2}, $\vDash^c_{RM2}$) donde $K^c_{RM2} = \{T, T{*}^c\}$, T es la teoría normal y prima construida en la Proposición 4.34 y $*^c$, R^c_{RM2} y $\vDash^c_{RM2}$son las restricciones de $*^P$, R^P_{RM2} y $\vDash^P$ a K^c_{RM2}.

Hemos de probar a continuación que el modelo canónico recién definido es, de hecho, un modelo. Previamente daremos una serie de pruebas que nos ayudarán con la posterior prueba.

Proposición 4.38 ($a = a**$): Para cualquier $a \in K^P_{RM2}$, $a = a *^P *^P$.

Prueba:
Resulta directa a través de A10, su contrapartida teoremática y el hecho de que las teorías estén cerradas por EF4-implicación.
■

Corolario 4.39 ($*^c$ es una operación involutiva en K^c_{RM2}): Para cualquier $a \in K^c_{RM2}$, $a*^c \in K^c_{RM2}$ y, además, $a = a *^c *^c$.

Prueba:
Es inmediata por la proposiciones 4.36 y 4.38
■

Como último paso antes de probar que el modelo canónico es realmente un modelo nos queda probar que la relación R^c_{RM2} y las cláusulas de la Definición 4.27 se siguen canónicamente. Procedemos, pues, con la primera instancia:

Lema 4.40 (R^C_{RM2} se sigue canónicamente): Si a, b, $c \in K^c_{RM2}$, entonces $R^c_{RM2}abc$ syss $b = c$ ó ($b = O$ y $a = c$.)

Prueba:
Dado el Corolario 4.38, es suficiente con probar que las siguientes relaciones se siguen: (I)$R^c_{RM2}TTT$ (II)$R^c_{RM2}TT{*}T{*}$ (III)$R^c_{RM2}T{*}T{*}T{*}$ (IV)$R^c_{RM2}T{*}TT$ (V)$R^c_{RM2}T * TT*$

Sean A y B fbf cualesquiera:

(I) Suponemos $A \to B \in T$ y $A \in T$. $B \in T$ se sigue del hecho de que T se encuentre cerrada por la regla de Modus Ponens.

(II) Suponemos $A \to B \in T$ y $A \in T*$. Como Hipótesis de Reductio tenemos $B \notin T*$. Por TE10, $A \to .B \vee \neg(A \to B)$, tenemos que $\neg(A \to B) \in T*$, lo que nos da $A \to B \notin T$, contradiciendo las hipótesis iniciales.

(III) Suponemos $A \to B \in T*$ y $A \in T*$. Al igual que en el caso anterior procedemos por reductio, obteniendo $B \notin T*$. Por TE9, $\neg B \to .\neg A \vee \neg(A \to B)$, y $\neg B \in T$ que se sigue de la Hipótesis de Reductio obtenemos $\neg A \vee \neg(A \to B) \in T$. Tenemos dos casos: para el primero, $\neg A \in T$ obtenemos $A \notin T*$, generando contradicción. Para el segundo, $\neg(A \to B) \in T$, ocurre lo mismo, $A \to B \notin T*$ es contradictorio con la hipótesis inicial.

(IV) Suponemos $A \to B \in T*$ y $A \in T$. Tenemos que $\neg(A \to B) \notin T$. TE10, $A \to .B \vee \neg(A \to B)$, junto con $A \in T$ nos ofrece $B \vee \neg(A \to B) \in T$, pero dado el resultado $\neg(A \to B) \notin T$, concluimos que $B \in T$, el resultado pretendido.

(V) Suponemos $A \to B \in T*$ y $A \in T$. Adicionalmente suponemos $B \notin T*$ como Hipótesis de Reductio. Obtenemos $\neg B \in T$. Por R4 tenemos que

$\neg(A \to B) \in T$, lo que a su vez nos proporciona $A \to B \notin T*$, generando una contradicción.

Queda así probado que R^c_{RM2} se sigue canónicamente.

■

Lema 4.41 (Las cláusulas C1-C5 se siguen canónicamente): Las cláusulas C1-C5 de la Definición 4.26 son satisfechas por el modelo canónico de 2 Set-up para EF4.

Prueba:

C1 es inmediato; C2 se sigue por A2 y el hecho de que las teorías estén cerradas por Adjunción; C3 se prueba por A3 y la primacía de T y $T*$; C4 de izquierda a derecha y C5 en su totalidad son inmediatas por la Definición 4.36. Por tanto, hemos de probar C4 de derecha a izquierda:

Para fbf A y B, suponemos $A \to B \notin T$ y hemos de probar que $R^c_{RM2}TTT$ y $A \in T$ y $B \notin T$ ó bien $R^c_{RM2}TT*T*$ y $A \in T*$ y $B \notin T*$. Procedemos por reductio, lo que nos ofrece 4 alternativas diferentes: (a).(i) $A \notin T$ y $A \notin T*$; (a).(ii) $A \notin T$ y $B \in T*$; (a).(iii) $B \in T$ y $A \notin T*$; (a).(iv) $B \in T$ y $B \in T*$. El siguiente paso consistirá en probar el absurdo de estos 4 casos, habiendo probado así la hipótesis original. Procedemos a analizar los 4 casos:

(a).(i) $A \notin T$ y $A \notin T*$: Desde la hipótesis original tenemos que $\neg(A \to B) \in T*$y, adicionalmente, $\neg A \in T*$, lo que unido a TE5, $\neg(A \to B) \wedge \neg A \to .A$, nos da $A \in T*$, generando una contradicción.

(a).(ii) $A \notin T$ y $B \in T*$: Conseguimos $\neg B \notin T$, lo que unido a $A \notin T$ y A13, $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$, nos da el resultado $A \to B \in T$, contradiciendo la hipótesis primera.

(a).(iii) $B \in T$ y $A \notin T*$: Obtenemos $\neg A \in T$, lo que unido a $B \in T$ y el teorema TE4,$\neg A \wedge B \to .A \to B$, nos da $A \to B \in T$, que contradice la hipótesis inicial.

(a).(iv) $B \in T$ y $B \in T*$: Desde el primer supuesto tenemos que $\neg(A \to B) \in T*$, lo que en conjunción con $B \in T*$ y TE8, $B \wedge \neg(A \to B) \to .\neg B$, nos da el resultado $\neg B \in T*$, que nos lleva hasta $B \notin T$ y generamos una contradicción.

Suponemos ahora (II) $A \to B \notin T*$ y tenemos que demostrar que $R^c_{RM2}T*T*T*$ y $A \in T*$ y $B \notin T*$, $R^c_{RM2}T*TT$ y $A \in T$ y $B \notin T$, ó bien $R^c_{RM2}T*TT*$ y $A \in T$ y $B \notin T*$. Como antes, procedemos por reductio, obteniendo 8 casos de nuevo: (b).(i) $A \notin T*$ y $A \notin T$; (b).(ii) $A \notin T*$, $A \notin T$ y $B \in T*$; (b).(iii) $A \notin T*$, $A \notin T$ y $B \in T$; (b).(iv) $A \notin T*$,$B \in T$ y $B \in T*$; (b).(v) $B \in T*$ y $A \notin T$; (b).(vi) $B \in T*$ y $A \notin T$; (b).(vii) $B \in T*$, $B \in T$ y $A \notin T$; (b).(viii) $B \in T*$ y $B \in T$. Procedemos, pues, a resolver los 8 casos, no sin antes tener en cuenta que la nueva hipótesis inicial nos ofrece $\neg(A \to B) \in T$ de manera directa:

(b).(i) $A \notin T*$ y $A \notin T$: Su resolución es idéntica a la del caso (a).(i)

(b).(ii) $A \notin T*$, $A \notin T$ y $B \in T*$: Puede ser resuelto como el caso anterior y, por ende, como el caso (a).(i)

(b).(iii) $A \notin T*$, $A \notin T$ y $B \in T$: De nuevo es resuelto como los dos casos anteriores.

(b).(iv) $A \notin T*$, $B \in T$ y $B \in T*$: Es posible resolverlo como el caso (a).(iv)

(b).(v) $B \in T*$y $A \notin T$: Podemos encontrar un ejemplo de cómo resolverlo en la prueba (a).(ii)

(b).(vi) $B \in T*$ y $A \notin T$: Es el mismo caso que el anterior, resolviéndose, por tanto, de la misma manera.

(b).(vii) $B \in T*$, $B \in T$ y $A \notin T$: Tanto en (a).(ii) como en (a).(iv) tenemos pruebas válidas para este caso.

(b).(viii) $B \in T*$ y $B \in T$: Su resolución transcurre igual que la del caso (a).(iv)

De esta manera queda probado que la cláusulas se siguen canónicamente.

■

A continuación podemos mostrar que el modelo canónico es efectivamente un modelo y, tras esto, dar el teorema de completud para EF4 respecto de la semántica de 2 Set-up.

Lema 4.42 (El modelo canónico de 2 Set-up para EF4 es un modelo para EF4): El modelo de 2 Set-up para EF4 definido más arriba es, de hecho, un modelo para EF4.

Prueba:

Por el Corolario 4.38 $*^C$ es una operación involutiva en K^C_{RM2}; Por el Lema 4.40 la relación ternaria R^C_{RM2} se sigue canónicamente; Por el Lema 4.41 las cláusulas C1-C5 de la Definición 4.26 se siguen cuando son interpretadas canónicamente.

■

Teorema 4.43 (Completud de EF4 respecto de la semántica de 2 Set-up): Para cualquier conjunto de fbf Γy una fbf cualquiera A, si $\Gamma \vDash_{EF4-RM2} A$, entonces $\Gamma \vdash_{EF4-RM2} A$

Prueba:

Suponemos $\Gamma \nvdash_{EF4-RM2} A$ para Γ y A definidos como un conjunto de fbf y una fbf cualesquiera. Por la Proposición 4.34 hay una teoría normal, prima y cerrada por las reglas T tal que $\Gamma \subseteq T$ y $A \notin T$. Entonces, el modelo canónico se define sobre T, tal y como se muestra en la Definición 4.37. A continuación, por el Lema 4.42, el modelo canónico es un modelo. Entonces $\Gamma \nvDash^C A$ ya que $T \vDash^C \Gamma$ pero $T \nvDash^C A$. Por lo tanto, podemos concluir $\Gamma \nvDash_{EF4-RM2} A$ por la Definición 4.30.

■

3 FDF4 y las semánticas relacionales

Hasta ahora en esta parte referida a las semánticas relacionales hemos abordado únicamente el caso del sistema EF4 pero, sin embargo, hemos obviado la cuestión en referencia a FDF4 a pesar de ser el otro sistema que hemos desarrollado a partir de la matriz M4. Por ello ahora probaremos que el sistema FDF4 es, como EF4, completo en sentido fuerte con respecto a la semántica relacional ternaria de modelo reducido y con respecto a la semántida de 2 Set-up.

Teorema 4.44 (Completud de FDF4 respecto de la semántica relacional ternaria de modelo reducido): Para cualquier fbf de FDF4 A, si $\Gamma \models_{RM} A$ entonces $\Gamma \vdash_{FDF4} A$

Prueba:
La prueba es automática por la completud de EF4, que probamos en el Teorema 4.26, y la equivalencia de FDF4 y EF4, que quedó probada en el Teorema 2.43.
■

Teorema 4.45 (Completud de FDF4 respecto de la semántica de 2 Set-up): Para cualquier fbf de FDF4 A, si $\Gamma \models_{RM2} A$ entonces $\Gamma \vdash_{FDF4} A$

Prueba:
Al igual que en el Teorema 4.44 anterior, la prueba es automática por la completud de EF4, probada en el Teorema 4.43, y la equivalencia de los sistemas EF4 y FDF4, probada a su vez en el Teorema 2.43.
■

4 La relación entre el modelo general y el modelo de 2 set-up

En este punto nuestro interés reside en estudiar la relación que se establece entre las dos semánticas relacionales relevantes que hemos desarrollado: La semántica relacional ternaria de modelo reducido y la semántica relacional ternaria de 2 set-up. Para ello probaremos que la segunda, la semántica relacional ternaria basada en 2 set-up no es más que un caso específico del modelo general reducido que hemos dado con anterioridad, siempre ciñéndonos al contexto del sistema que hemos estudiado, EF4.

Teorema 4.46 (El modelo de los 2 set-up es un caso específico del modelo general): El modelo de 2 set-up de la Definición 4.26, es un caso específico del modelo general reducido que hemos desarrollado en la Definición 4.1

Prueba:

El objetivo en esta prueba consistirá en probar que todas las relaciones del modelo basado en 2 set-up, verifican todos y cada uno de los postulados del modelo general reducido. Para ello primero listaremos el postulado correspondiente al modelo general reducido y, a continuación, mostraremos como las relaciones del modelo basado en 2 set-up lo verifican:

(I). P1. $a \leq a$; Es verificado por las relaciones:

(a). $R_{RM2}OOO$

(b). $R_{RM2}OO*O*$

(II). P2. Si $a \leq b$ y $Rbcd$, entonces $Racd$

(a). La relación $R_{RM2}OOO$ da como resultado $R_{RM2}OOO$

(b). La relación $R_{RM2}OO*O*$ da como resultado $R_{RM2}OO*O*$

(III). P3. Si R^2abcd, entonces $(\exists x \in K_{RM})\,(Racx\ y\ Rbxd)$

(a). La relación $R_{RM2}OOO$ da como resultados $R_{RM2}OOOO$ y $R_{RM2}OOO*O*$, que a su vez ofrecen, respectivamente $R_{RM2}OOO$ y $R_{RM2}OOO$, y $R_{RM2}OO*O*$ y $R_{RM2}OO*O*$

(b). La relación $R_{RM2}OO*O*$ da como resultados $R_{RM2}OO*O*O*$, $R_{RM2}OO*OO*$ y $R_{RM2}OO*OO$, que a su vez ofrecen, respectivamente, $R_{RM2}OO*O*$ y $R_{RM2}O*O*O*$, $R_{RM2}OOO$ y $R_{RM2}O*OO*$, y $R_{RM2}OOO$ y $R_{RM2}O*OO$

(c). La relación $R_{RM2}O*O*O*$ da como resultados $R_{RM2}O*O*O*O*$, $R_{RM2}O*O*OO*$ y $R_{RM2}O*O*OO$, que a su vez ofrecen, respectivamente, $R_{RM2}O*O*O*$ y $R_{RM2}O*O*O*$, $R_{RM2}O*OO$ y $R_{RM2}O*OO*$, y $R_{RM2}O*OO$ y $R_{RM2}O*OO$

(d). La relación $R_{RM2}O*OO*$ da como resultados $R_{RM2}O*OO*O*$, $R_{RM2}O*OOO*$ y $R_{RM2}O*OOO$, que a su vez ofrecen, respectivamente, $R_{RM2}O*O*O*$ y $R_{RM2}OO*O*$, $R_{RM2}O*OO*$ y $R_{RM2}OO*O*$, y $R_{RM2}O*OO$ y $R_{RM2}OOO$

(e). La relación $R_{RM2}O*OO$ da como resultados $R_{RM2}O*OOO$ y $R_{RM2}O*OO*O*$, que a su vez ofrecen, respectivamente, $R_{RM2}O*OO$ y $R_{RM2}OOO$, y $R_{RM2}O*O*O*$ y $R_{RM2}OO*O*$

(IV). P4. $a = a**$

Queda verificado de manera automática.

(V). P5. Si $Rabc$, entonces $Rac*b*$

(a). La relación $R_{RM2}OOO$ da como resultado $R_{RM2}OO*O*$

(b). La relación $R_{RM2}OO*O*$ da como resultado $R_{RM2}OOO$

(c). La relación $R_{RM2}O*O*O*$ da como resultado $R_{RM2}O*OO$

(d). La relación $R_{RM2}O*OO$ da como resultado $R_{RM2}O*O*O*$

(e). La relación $R_{RM2}O*OO*$ da como resultado $R_{RM2}O*OO*$

(VI). P6. Si R^2abcd, entonces $(\exists x \in K_{RM})\,(Rbcx\ y\ Raxd)$

(a). La relación $R_{RM2}OOO$ da como resultados $R_{RM2}OOOO$ y $R_{RM2}OOO*O*$, que a su vez ofrecen, respectivamente, $R_{RM2}OOO$ y $R_{RM2}OOO$, y $R_{RM2}OO*O*$ y $R_{RM2}OO*O*$

(b). La relación $R_{RM2}OO*O*$ da como resultados $R_{RM2}OO*O*O*$, $R_{RM2}OO*OO*$ y $R_{RM2}OO*OO$, que a su vez ofrecen, respectivamente, $R_{RM2}O*O*O*$ y $R_{RM2}OO*O*$, $R_{RM2}O*OO*$ y $R_{RM2}OO*O*$, y $R_{RM2}O*OO$ y $R_{RM2}OOO$

(c). La relación $R_{RM2}O*O*O*$ da como resultados $R_{RM2}O*O*O*O*$, $R_{RM2}O*O*OO*$ y $R_{RM2}O*O*OO$, que a su vez ofrecen, respectivamente, $R_{RM2}O*O*O*$ y $R_{RM2}O*O*O*$, $R_{RM2}O*OO$ y $R_{RM2}O*OO*$, y $R_{RM2}O*OO$ y $R_{RM2}O*OO$

(d). La relación $R_{RM2}O*OO*$ da como resultados $R_{RM2}O*OO*O*$, $R_{RM2}O*OOO*$ y $R_{RM2}O*OOO$, que a su vez ofrecen, respectivamente, $R_{RM2}OO*O*$ y $R_{RM2}O*O*O*$, $R_{RM2}OOO$ y $R_{RM2}O*OO*$, y $R_{RM2}OOO$ y $R_{RM2}O*OO$

(e). La relación $R_{RM2}O*OO$ da como resultados $R_{RM2}O*OOO$ y $R_{RM2}O*OO*O*$, que a su vez ofrecen, respectivamente, $R_{RM2}OOO$ y $R_{RM2}O*OO$, y $R_{RM2}OO*O*$ y $R_{RM2}O*O*O*$

(VII). P7. Si $Rabc$, entonces R^2abbc

(a). La relación $R_{RM2}OOO$ da como resultado $R_{RM2}OOOO$

(b). La relación $R_{RM2}OO*O*$ da como resultado $R_{RM2}OO*O*O*$

(c). La relación $R_{RM2}O*O*O*$ da como resultado $R_{RM2}O*O*O*O*$

(d). La relación $R_{RM2}O*OO*$ da como resultado $R_{RM2}O*OOO*$

(e). La relación $R_{RM2}O*OO$ da como resultado $R_{RM2}O*OOO$

(VIII). P8. $(\exists x \in Z)\,(Raxa)\ ]Za$ syss $\forall b,\, c \in K_{RM}$, si $Rabc$, entonces $RObc]$

(a). La relación $R_{RM2}OOO$ verifica el postulado

(b). La relación $R_{RM2}O*OO*$ verifica el postulado

(IX). P9. Si $RObc$, entonces $b \leq O$ ó $O* \leq c$

(a). La relación $R_{RM2}OOO$ da como resultado $R_{RM2}OOO$ ó $R_{RM2}OO*O$

(b). La relación $R_{RM2}OO*O*$ da como resultado $R_{RM2}OO*O$ ó $R_{RM2}OO*O*$

(X). P10. Si $Ra*bc$, entonces $a* \leq c$ ó $a \leq c$

(a). La relación $R_{RM2}O*O*O*$ da como resultado $R_{RM2}OO*O*$ ó $R_{RM2}OOO*$

(b). La relación $R_{RM2}O*OO*$ da como resultado $R_{RM2}OO*O*$ ó $R_{RM2}OOO*$

(c). La relación $R_{RM2}O*OO$ da como resultado $R_{RM2}OO*O$ ó $R_{RM2}OOO$

(XI). P11. Si $Ra*bc$, entonces $b \leq a$ ó $a* \leq c$

(a). La relación $R_{RM2}O*O*O*$ da como resultado $R_{RM2}OOO*$ ó $R_{RM2}OO*O*$

(b). La relación $R_{RM2}O*OO*$ da como resultado $R_{RM2}OOO$ ó $R_{RM2}OO*O*$

(c). La relación $R_{RM2}O*OO$ da como resultado $R_{RM2}OOO$ ó $R_{RM2}OO*O$

(XII) P12. $Ra*Oa*$
(a). El postulado se verifica por la relación $R_{RM2}O*OO*$
(b). El postulado se verifica por la relación $R_{M2}O**OO**$, equivalente a $R_{M2}OOO$

Así queda probado que en el sistema EF4, el modelo basado en 2 set-up es un caso específico del modelo general reducido.
■

Bibliografía

A

Ackermann, W., 1956. Begründung einer strengen Implikation. Journal Of Symbolic Logic 21, 113–128.

Ackermann, W., 1958. Über die Beziehung zwischen strikter und strenger Implikation. Dialectica 12, 213–222.

Alban, M.J., 1943. Independence of the primitive symbols of Lewis' calculi of propositions. Journal Of Symbolic Logic 8, 24–26.

Anderson, A.R., 1960. Completness Theorems for the Systems E of Entailment and EQ of Entailment with Quantification. Mathematical Logic Quaterly 6, 7–14.

Anderson, A.R., Belnap, N.D., 1959. Modalities in Ackermann's "Rigorous Implication." Journal Of Symbolic Logic 24, 107–111.

Anderson, A.R., Belnap, N.D., 1962. The pure calculus of entailment. Journal Of Symbolic Logic 27, 19–52.

Anderson, A.R., Belnap, N.D., 1975. Entailment: The logic of relevance and necessity, Vol. I. Princeton University Press.

Anderson, A.R., Belnap, N.D., Dunn, J.M., 1992. Entailment: The logic of relevance and necessity, Vol. II. Princeton University Press.

Arieli, O., Avron, A., 1997. Bilattices and Paraconsistency.

Aristóteles, 1972. Tratados de lógica: El Organon. Porrúa, México.

B

Beall, J., Brady, R.T., Dunn, J.M., Hazen, A., Mares, E., Meyer, R.K., Priest, G., Restall, G., Ripley, D., Slaney, J.K., Sylvan, R., 2012. On the ternary relation and conditionality. Journal Of Philosophical Logic 41, 595–612.

Becker, O., 1930. Zur Logick der Modalitäten. Jarbuch für Philosophie und phänonenologische Forschung 11, 496–548.

Belnap, N.D., 1960. Entailment and relevance. Journal Of Symbolic Logic 25, 144–146.

Belnap, N.D., 1977a. A useful four valued-logic. Episteme, Modern Uses of Multiple-Valued Logics 2, 5–37.

Belnap, N.D., 1977b. How a computer should think. Contemporary Aspects of Philosophy 30–55.

Bennet, J.F., 1954. Meaning and Implication. Mind 63, 451–463.

Beziau, J.Y., 2011. A new four-valued approach to modal logic. Logique et Analyse 54.

Blanco, J.M., 2015. Postulados semánticos correspondientes para el axioma Modus Ponens, el axioma Modus Tollens y otras tesis semejantes en el contexto de la lógica relevante DW (Trabajo de Fin de Máster). Universidad de Salamanca, Salamanca.

Blok, W.J., Pigozzi, D., 1989. Algebraizable Logics. Memoirs of the American Mathematical Society 77, 1–77.

Brady, R.T., 1980. A theory of classes and individuals based on a 3-valued significance logic. Notre Dame Journal of Formal Logic 21, 385–414.

Brady, R.T., 1982. Completeness Proofs for the Systems RM3 and BN4. Logique et Analyse 25, 18–33.

Brady, R.T., 1983. The Simple Consistency of a Set Theory Based on the Logic CSQ. Notre Dame Journal of Formal Logic 24, 431–449.

Brady, R.T., 1992. Hierarchical Semantics for Relevant Logics. Journal Of Philosophical Logic 21, 357–374.

Brady, R.T., 1996. Relevant Implication and the Case for a Weaker Logic. Journal Of Philosophical Logic 25, 151–183.

Brady, R.T. (Ed.), 2003. Relevant Logics and their Rivals, Vol. II. Ashgate.

Brady, R.T., 2006. Universal Logic. CSLI.

Brady, R.T., 2015. Logic - The Big Picture, in: Beziau, J.Y. (Ed.), New Directions in Paraconsistent Logic. Springer Procedings in Mathematics & Statistics, pp. 353–373.

Bull, R., Segerberg, K., 1984. Basic Modal Logic. Handbook of Philosophical Logic 3, 1–81.

C

Carnap, R., 1942. Introduction to Semantics. Harvard University Press, Cambridge, MA.

Carnap, R., 1947. Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic. The University of Chicago Press, Chicago.

Church, A., 1951. The Weak Theory of Implication. Kontrolliertes Denken: Untesuchugen zum Logikkalkül under der Einzelwissenchaften 22–37.

Curry, H.B., 1950. A Theory of Formal Deducibility. University of Notre Dame Press, Notre Dame, IN.

D

Dosen, K., 1992. The first axiomatization of relevant logic. Journal Of Philosophical Logic 21, 339–356.

Duncan-Jones, A.E., 1935. Is strict implication the same as entailment? Analysis 2, 70–78.

Dunn, J.M., 1976a. Intuitive Semantics for First-Degree Entailments and “Coupled Trees.” Philosophical Studies 29, 149–168.

Dunn, J.M., 1976b. Quantification and RM. Studia Logica 35, 315–322.

Dunn, J.M., 1980. A Sieve for Entailments. Journal Of Philosophical Logic 9, 41–57.

Dunn, J.M., 2000. Partiality and Its Dual. Studia Logica 66, 5–40.

Dunn, J.M., 2015. The Relevance of Relevance to Relevance Logic. Logic and Its Applications 8923, 11–29.

F

Fine, K., 1974. Models for entailment. Journal Of Philosophical Logic 3, 347–372.

Fitch, F.B., 1948. Intuitionistic modal logic with quantifiers. Portugaliae Mathematica 7, 113–118.

Font, J.M., Hájek, P., 2002. On Łukasiewicz's Four-Valued Modal Logic. Studia Logica 70, 157–182.

Font, J.M., Rius, M., 2000. An abstract algebraic approach to tetravalent modal logics. Journal Of Symbolic Logic 65.

Friedman, H., 1975. One hundred and two problems in mathematical logic. Journal Of Symbolic Logic 40, 113–129.

G

Goble, L., 2006. Paraconsistent Modal Logic. Logique et Analyse 193, 3–29.

Gödel, K., 1933. Eine Interpretation des intuitionistichen Aussagenkalküls. Ergenisse eines mathematisches Kolloquiums 4, 39–40.

González, C., 2012. MaTest.

H

Halldén, S., 1949. Resuslts concerning the decision problem of Lewis's calculi S3 and S4. Journal Of Symbolic Logic 15, 230–236.

Henkin, L., 1949. The completeness of the first order functional calculus. Journal Of Symbolic Logic 14, 159–166.

Hintikka, J., 1957. Quantifiers in Deontic Logic. Societas Scientarum Fennica, Commentationes humanarum litterarum 23.

Hintikka, J., 1961. Modality and Quantification. Theoria 27, 119–128.

Hintikka, J., 1963. The Modes of Modality. Acta Philosophica Fennica 16, 65–82.

Hintikka, J., 1969. Reviez. Journal Of Symbolic Logic 34, 305-306

Hughes, G.E., Cresswell, M.J., 1968. An Introduction to Modal Logic. Methuen, Londres.

Hughes, G.E., Cresswell, M.J., 1985. A Companion to Modal Logic. Routledge, Londres.

Hughes, G.E., Cresswell, M.J., 1995. A New Introduction to Modal Logic. Routledge, Londres.

K

Kanger, S., 1957a. A note on quantification and modalities. Theoria 23, 131–134.

Kanger, S., 1957b. New Foundations for Ethical Theory. Estocolmo.

Kanger, S., 1957c. Provability in Logic. Estocolmo.

Kanger, S., 1957d. The Morning Star Paradox. Theoria 23, 1–11.

Kripke, S.A., 1959. A completeness theorem in modal logic. Journal Of Symbolic Logic 24, 1–14.

Kripke, S.A., 1963a. Semantical analysis of modal logic I: Non-normal modal propositional calculi. Zeit. Math. Logik. Grund. 9, 67–96.

Kripke, S.A., 1963b. Semantical considerations on modal logic. Acta Philosophica Fennica 16, 83–94.

Kripke, S.A., 1965. Semantical analysis of modal logic II: Non-normal modal propositional calculi. The Theory of Models 206–220.

Kuratowski, K., 1922. Une méthode d'élimination des nombres transfini des raisonnements mathématiques. Fundamenta Mathematicae 3, 76–108.

L

Lemmon, E.J., 1966a. Semantics for Modal Logics - I. Journal Of Symbolic Logic 31, 46–65.

Lemmon, E.J., 1966b. Semantics for Modal Logics - II. Journal Of Symbolic Logic 31, 191–218.

Lemmon, E.J., Meredith, C.A., Meredith, D., Prior, A.N., Thomas, I., 1969. Calculi of Pure Strict Implication. Philosophical Logic 20, 215–250.

Lewis, C.I., 1912. Implication and the Algebra of Logic. Mind 21, 522–531.

Lewis, C.I., 1918. A Survey of Symbolic Logic. University of California Press, Berkeley.

Lewis, C.I., Langford, C.H., 1959. Symbolic Logic, 2ª ed. Dover Publications.

Łukasiewicz, J., 1951. Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic. Clarendon Press, Oxford.

Łukasiewicz, J., 1953. A System of Modal Logic. Journal Of Computing Systems 1, 111–149.

Łukasiewicz, J., 1970. Selected Works. North Holland, Amsterdam.

M

Maksimowa, L.L., 1970. E-Theories. Algebra i Logika 9, 530–538.

Maksimowa, L.L., 1971. An Interpretation and Separation Theorems for the Logical Systems E and R. Algebra i Logika 10, 376–392.

Maksimowa, L.L., 1973. A Semantics for the Calculus E of Entailment. Bulletin of the Section of Logic 2, 18–21.

Malinowski, G., 1977. Historical Note. Selected Papers on Łukasiewicz Sentential Calculi 177–187.

McCall, S., 1967. Polish Logic 1920-1939. Clarendon Press, Oxford.

McKinsey, J.C.C., 1945. On the Syntactical Construction of Modal Logic. Journal Of Symbolic Logic 10, 83–96.

Méndez, J.M., Robles, G., 2012. A general characterization of the variable-sharing property by means of logical matrices. Notre Dame Journal of Formal Logic 53, 223–244.

Méndez, J.M., Robles, G., 2015. A strong and rich 4-valued modal logic without Łukasiewicz-type paradoxes. Logica Universalis 9, 501–522.

Méndez, J.M., Robles, G., 2016a. Strengthening Brady's paraconsistent 4-valued logic BN4 with truth-functional modal operators. Journal Of Logic, Language And Information 25, 163–189.

Méndez, J.M., Robles, G., 2016b. The logic determined by Smiley's matrix for Anderson and Belnap's first-degree entailment logic. Journal Of Applied Non-Classical Logics 26, 47–68.

Méndez, J.M., Robles, G., Salto, F., 2016. An interpretation of Łukasiewicz's 4-valued. Journal Of Philosophical Logic 45, 73–87.

Meyer, R.K., Giambrone, S., Brady, R.T., 1983. Where Gamma Fails. Studia Logica 43, 247–256.

Meyer, R.K., Mortensen, C., 1984. Inconsistent Models for Relevant Arithmetics. Journal Of Symbolic Logic 49, 917–929.

Montague, R., 1963. Syntactical Treatments of Modality, with Corollaries on Reflextion Principles and Finite Axiomatisability. Acta Philosophica Fennica 16, 153–167.

Mortensen, C., 1980. Relevant Algebras and Relevant Model Structures. Research Paper No. 8, Logic Group, Department of Philosophy, Research School of Social Sciences, Australian National University.

Mortensen, C., 1982. Model Structures and Set Algebras for Sugihara Matrices. Notre Dame Journal of Formal Logic 23, 85–90.

N

Nelson, E.J., 1930. Intensional relations. Mind 39, 440–453.

O

Odinstov, S.P., Wansing, H., 2010. Modal Logics with Belnapian Truth Values. Journal Of Applied Non-Classical Logics 20, 279–301.

Osorio, M., 2007. GLukG logic and its application for non-monotonic reasoning. LANMR.

P

Parry, W.T., 1934. The Postulates for Strict Implication. Mind 43, 78–80.

Prawitz, D., 1965. Natural Deduction: A Proof-theoretic Study. Stockholm Studies in Philocopy 3.

Priest, G., 1984. Logic of Paradox Revisited. Journal Of Philosophical Logic 13, 153–179.

Priest, G., 2011. Realism, Antirealism, and Paraconsistency. Logic, Epistemology, and the Unity of Science 23, 181–190.

Priest, G., 2014. Contradictory Concepts. Logic, Reasoning, and Rationality 5, 197–215.

Priest, G., 2016. Thinking the Impossible. Philosophical Studies 173.

Prior, A.N., 1957. Time and Modality. Clarendon Press, Oxford.

R

Restall, G., 1999. Negation in Relevant Logics (How I Stopped Worrying and Learned to Love the Routley Star). Applied Logic Series: What is negation? 13, 53–76.

Robles, G., 2006. Negaciones subintuicionistas para lógicas con la conversa de la propiedad Ackermann (Tesis Doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca.

Robles, G., 2013. A Routley-Meyer semantics for Gödel 3-valued logic and its paraconsistent counterpart. Logica Universalis 7, 507–532.

Robles, G., Blanco, J.M., López, S.M., Paradela, J.R., Recio, M.M., 2016a. Relational semantics for the 4-valued relevant logics BN4 and E4. Logic and Logical Philosophy 23, 173-201.

Robles, G., López, S.M., Blanco, J.M., Recio, M.M., Paradela, J.R., 2016b. A 2-set-up Routley-Meyer semantics for the 4-valued relevant logic E4. Bulletin of the Section of Logic 45, 93–109.

Robles, G., Méndez, J.M., 2014a. A paraconsistent 3-valued logic related to Gödel logic G3. Logic Journal of the IGPL 22, 515–538.

Robles, G., Méndez, J.M., 2014b. A Routley-Meyer semantics for truth-preserving and well-determined Łukasiewicz 3-valued logics. Logic Journal of the IGPL 22, 1–23.

Robles, G., Méndez, J.M., 2016. A companion to Brady's 4-valued relevant logic BN4: The 4-valued logic of entailment E4. Logic Journal of the IGPL 24, 838–858.

Routley, R., 1980. The american plan completed: Alternative classical-style semantics, without stars, for relevant and paraconsistent logics. Studia Logica 43, 131–158.

Routley, R., Meyer, R.K., 1972a. The semantics of entailment - II. Journal Of Philosophical Logic 1, 53–73.

Routley, R., Meyer, R.K., 1972b. The semantics of entailment - III. Journal Of Philosophical Logic 1, 192–208.

Routley, R., Meyer, R.K., 1973. The semantics of entailment - I, in: Leblanc, H. (Ed.), Truth, Syntax and Modality. Proceedings of the Temple University Conference on Alternative Semantics. North Holland Publishing Company, pp. 199–243.

Routley, R., Meyer, R.K., 1983. Relevant Logics and their semantics Remain Viable and Undamaged by Lewis's Equivocation Charge. Topoi 2, 205–215.

Routley, R., Meyer, R.K., Plumwood, V., Brady, R.T., 1982. Relevant Logics And Their Rivals, Vol. I. Ridgeview, Atascadero, CA.

S

Slaney, J.K., 1987. Reduced Models for Relevant Logics Without WI. Notre Dame Journal of Formal Logic 28, 395–407.

Slaney, J.K., 1995. MaGIC, Matrix Generator for Implicative Connectives. Canberra: Australian National University.

Slaney, J.K., 2005. Relevant Logic and Paraconsistency, in: Bertossi, L., Hunter, A., Schaub, T. (Eds.), Inconsistency Tolerance, Lecture Notes in Computer Science. pp. 270–293.

Smiley, T.J., 1961. On Łukasiewicz Ł-Modal System. Notre Dame Journal of Formal Logic 2, 149–153.

Solovay, R.S.M., 1976. Provability Interpretations of Modal Logic. Israel Journal of Mathematics 25, 287–304.

Strawson, P.F., 1948. Necessary propositions and entailment-statements. Mind 57, 184–200.

T

Tennant, N., 1987. Natural Deduction and Sequent Calculus for Intuitionistic Relevant Logic. Journal Of Symbolic Logic 52, 665–680.

U

Urquhart, A., 1972. Semantics for relevant logics. Journal Of Symbolic Logic 37, 159–169.

Urquhart, A., 1984. The Undecidability of Entailment and Relevant Implication. Journal Of Symbolic Logic 49, 1059–1073.

Urquhart, A., 2016. The Story of Gamma, en: J. Michael Dunn on Information Based Logics, Outstanding Contributions to Logic. Springer International Publishing, pp. 93–105.

V

von Wright, G.H., 1951a. An Essay in Modal Logic. North Holland Publishing Company, Amsterdam.

von Wright, G.H., 1951b. Deontic Logic. Mind 60, 1–15.

von Wright, G.H., 1968. An essay in deontic logic and general theory of action with a bibliography of deontic and imperative logic. Acta Philosophica Fennica 21.

Z

Zorn, M., 1935. A remark on method in transfinite algebra. Bulletin of the American Mathematical Society 41, 667–670.

Anexo: Desarrollo de las axiomatizaciones

En este anexo mostraremos cómo se ha configurado y cuál ha sido el proceso seguido para la obtención de las diferentes axiomatizaciones de los distintos sistemas. Comenzaremos con FDF4:

Primero presentamos el sistema FDE definido como sigue:

A1. $A \to A$

A2. $A \wedge B \to .A$ / $A \wedge B \to .B$

A3. $A \to .A \vee B$ / $B \to .A \vee B$

A4. $A \wedge (B \vee C) \to .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A5. $A \to \neg\neg A$

A6. $\neg\neg A \to A$

R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$

R2. $A \to B\, y\, A \Rightarrow B$

R3. $A \to B\, y\, B \to C \Rightarrow A \to C$

R4. $A \to B\, y\, A \to C \Rightarrow A \to .B \wedge C$

R5. $A \to C\, y\, B \to C \Rightarrow A \vee B \to .C$

R6. $A \to B \Rightarrow \neg B \to \neg A$

Añadimos a FDE el axioma de Modus Ponens y el axioma de Modus Tollens para tener mayor libertad de movimiento:

A7. $(A \to B) \wedge A \to .B$

A8. $(A \to B) \wedge \neg B \to .\neg A$

Y añadimos a su vez los axiomas y la regla característica del condicional:

A9.$(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$

A10. $\neg A \wedge \neg(A \to B) \to .A$

A11. $B \wedge \neg (A \to B) \to .\neg B$

A12. $\neg (A \to B) \to .A \vee \neg B$

R7. $A\, y\, \neg B \Rightarrow \neg (A \to B)$

Así, la axiomatización quedaría tal y como sigue, uniendo ya tanto FDE como los complementos necesarios:

A1. $A \to A$

A2. $A \wedge B \to .A$ / $A \wedge B \to .B$

A3. $A \to .A \vee B$ / $B \to .A \vee B$

A4. $A \wedge (B \vee C) \to .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A5. $A \to \neg\neg A$

A6. $\neg\neg A \to A$

A7. $(A \to B) \wedge A \to .B$

A8. $(A \to B) \wedge \neg B \to .\neg A$

A9.$(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$

A10. $\neg A \wedge \neg(A \to B) \to .A$

A11. $B \wedge \neg (A \to B) \to \textbf{.}\neg B$
A12. $\neg (A \to B) \to \textbf{.}A \vee \neg B$
R1. $A \, y \, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \to B \, y \, A \Rightarrow B$
R3. $A \to B \, y \, B \to C \Rightarrow A \to C$
R4. $A \to B \, y \, A \to C \Rightarrow A \to \textbf{.}B \wedge C$
R5. $A \to C \, y \, B \to C \Rightarrow A \vee B \to \textbf{.}C$
R6. $A \to B \Rightarrow \neg B \to \neg A$
R7. $A \, y \, \neg B \Rightarrow \neg (A \to B)$

En último término sustituiremos las reglas por sus versiones disyuntivas a excepción de R1 y R2, ya que ambas versiones disyuntivas se siguen del sistema:
A1. $A \to A$
A2. $A \wedge B \to \textbf{.}A \; / \; A \wedge B \to \textbf{.}B$
A3. $A \to \textbf{.}A \vee B \; / \; B \to \textbf{.}A \vee B$
A4. $A \wedge (B \vee C) \to \textbf{.} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A5. $A \to \neg\neg A$
A6. $\neg\neg A \to A$
A7. $(A \to B) \wedge A \to \textbf{.}B$
A8. $(A \to B) \wedge \neg B \to \textbf{.}\neg A$
A9.$(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$
A10. $\neg A \wedge \neg(A \to B) \to \textbf{.}A$
A11. $B \wedge \neg (A \to B) \to \textbf{.}\neg B$
A12. $\neg (A \to B) \to \textbf{.}A \vee \neg B$
R1. $A \, y \, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \to B \, y \, A \Rightarrow B$
R3. $D \vee (A \to B) \; y \, D \vee (B \to C) \Rightarrow D \vee (A \to C)$
R4. $D \vee (A \to B) \; y \, D \vee (A \to C) \Rightarrow D \vee (A \to (B \wedge C))$
R5. $D \vee (A \to C) \; y \, D \vee (B \to C) \Rightarrow D \vee ((A \vee B) \to C)$
R6. $C \vee (A \to B) \Rightarrow C \vee (\neg B \to \neg A)$
R7. $C \vee A \, y \, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \to B)$

Mostramos ahora cómo obtener EF4:
Partimos en un principio de la siguiente axiomatización de E sin reductio:
A1. $A \to A$
A2. $A \wedge B \to \textbf{.}A / A \wedge B \to \textbf{.}B$
A3. $A \to \textbf{.}A \vee B / B \to \textbf{.}A \vee B$
A4. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to \textbf{.}A \to (B \wedge C)$
A5. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to \textbf{.} (A \vee B) \to C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \to \textbf{.} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \to B \to \textbf{.} (B \to C) \to (A \to C)$
A8. $A \to B \to \textbf{.} (C \to A) \to (C \to B)$
A9. $A \to \neg B \to \textbf{.}B \to \neg A$
A10. $\neg\neg A \to A$
A11. $A \to (A \to B) \to \textbf{.}A \to B$
A12. $[(A \to A) \wedge (B \to B)] \to C \to \textbf{.}C$

R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \rightarrow B\, y\, A \Rightarrow B$

Tomando esta axiomatización le añadimos los axiomas y regla que caracterizan el condicional de la matriz M4 con la que trabajamos:
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)$
A14. $B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow .\neg B$
A15. $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B$
R3. $A\, y\, \neg B \Rightarrow \neg (A \rightarrow B)$

Al igual que hicimos al axiomatizar sobre FDE incluimos las variantes disyuntivas de las reglas. En este caso sustituimos Contraejemplo por su versión disyuntiva, ya que es fácil obtener la regla original de la disyuntiva tal:
R3'. $C \vee A\, y\, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \rightarrow B)$

De esta manera EF4 quedaría como sigue:
A1. $A \rightarrow A$
A2. $A \wedge B \rightarrow .A/A \wedge B \rightarrow .B$
A3. $A \rightarrow .A \vee B/B \rightarrow .A \vee B$
A4. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow .A \rightarrow (B \wedge C)$
A5. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \rightarrow B \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
A8. $A \rightarrow B \rightarrow .(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$
A9. $A \rightarrow \neg B \rightarrow .B \rightarrow \neg A$
A10. $\neg\neg A \rightarrow A$
A11. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow .A \rightarrow B$
A12. $[(A \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow B)] \rightarrow C \rightarrow .C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)$
A14. $B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow .\neg B$
A15. $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B$
R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \rightarrow B\, y\, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A\, y\, C \vee (A \rightarrow B) \Rightarrow C \vee B$

Procedemos con la obtención de los sistemas modales empezando por EF4-M:
Partimos de la axiomatización de EF4:
A1. $A \rightarrow A$
A2. $A \wedge B \rightarrow .A/A \wedge B \rightarrow .B$
A3. $A \rightarrow .A \vee B/B \rightarrow .A \vee B$
A4. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow .A \rightarrow (B \wedge C)$
A5. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \rightarrow B \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
A8. $A \rightarrow B \rightarrow .(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$
A9. $A \rightarrow \neg B \rightarrow .B \rightarrow \neg A$

A10. $\neg\neg A \rightarrow A$
A11. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow .A \rightarrow B$
A12. $[(A \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow B)] \rightarrow C \rightarrow .C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)$
A14. $B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow .\neg B$
A15. $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B$
R1. $A \, y \, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \rightarrow B \, y \, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A \, y \, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \rightarrow B)$

Añadimos ahora las tesis correspondientes a los dos nuevos operadores modales:
A16. $LA \rightarrow A$
A17. $\neg LA \wedge A \rightarrow .\neg A$
A18. $\neg LA \vee A$
A19. $MA \wedge \neg A \rightarrow .A$
A20. $A \rightarrow MA$
A21. $\neg A \vee MA$

De manera adicional añadimos las ECQ modales:
A22. $LA \wedge \neg LA \rightarrow .B$
A23. $MA \wedge \neg MA \rightarrow .B$

Así, el sistema resultante, EF4-M, quedaría como sigue:
A1. $A \rightarrow A$
A2. $A \wedge B \rightarrow .A/A \wedge B \rightarrow .B$
A3. $A \rightarrow .A \vee B/B \rightarrow .A \vee B$
A4. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow .A \rightarrow (B \wedge C)$
A5. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \rightarrow B \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
A8. $A \rightarrow B \rightarrow .(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$
A9. $A \rightarrow \neg B \rightarrow .B \rightarrow \neg A$
A10. $\neg\neg A \rightarrow A$
A11. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow .A \rightarrow B$
A12. $[(A \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow B)] \rightarrow C \rightarrow .C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)$
A14. $B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow .\neg B$
A15. $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B$
A16. $LA \rightarrow A$
A17. $\neg LA \wedge A \rightarrow .\neg A$
A18. $\neg LA \vee A$
A19. $MA \wedge \neg A \rightarrow .A$
A20. $A \rightarrow MA$
A21. $\neg A \vee MA$
A22. $LA \wedge \neg LA \rightarrow .B$

A23. $MA \wedge \neg MA \rightarrow .B$
R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \rightarrow B\, y\, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A\, y\, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \rightarrow B)$

El siguiente sistema es EF4-Ł (I):
Partimos de EF4:
A1. $A \rightarrow A$
A2. $A \wedge B \rightarrow .A / A \wedge B \rightarrow .B$
A3. $A \rightarrow .A \vee B / B \rightarrow .A \vee B$
A4. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow .A \rightarrow (B \wedge C)$
A5. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \rightarrow B \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
A8. $A \rightarrow B \rightarrow .(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$
A9. $A \rightarrow \neg B \rightarrow .B \rightarrow \neg A$
A10. $\neg\neg A \rightarrow A$
A11. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow .A \rightarrow B$
A12. $[(A \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow B)] \rightarrow C \rightarrow .C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)$
A14. $B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow .\neg B$
A15. $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B$
R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \rightarrow B\, y\, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A\, y\, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \rightarrow B)$

Y añadimos los teoremas y reglas, ya en su versión disyuntiva, modales correspondientes:
A16. $LA \rightarrow A$
A17. $\neg LA \wedge A \rightarrow .\neg A$
A18. $\neg LA \vee A$
A19. $MA \wedge \neg A \rightarrow .A$
A20. $A \rightarrow MA$
A21. $\neg A \vee MA$
R4. $C \vee A \Rightarrow C \vee LA$
R5. $C \vee \neg A \Rightarrow C \vee \neg MA$

Así la axiomatización quedaría como sigue:
A1. $A \rightarrow A$
A2. $A \wedge B \rightarrow .A / A \wedge B \rightarrow .B$
A3. $A \rightarrow .A \vee B / B \rightarrow .A \vee B$
A4. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow .A \rightarrow (B \wedge C)$
A5. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \rightarrow B \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
A8. $A \rightarrow B \rightarrow .(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$

A9. $A \rightarrow \neg B \rightarrow .B \rightarrow \neg A$
A10. $\neg\neg A \rightarrow A$
A11. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow .A \rightarrow B$
A12. $[(A \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow B)] \rightarrow C \rightarrow .C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)$
A14. $B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow .\neg B$
A15. $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B$
A16. $LA \rightarrow A$
A17. $\neg LA \wedge A \rightarrow .\neg A$
A18. $\neg LA \vee A$
A19. $MA \wedge \neg A \rightarrow .A$
A20. $A \rightarrow MA$
A21. $\neg A \vee MA$
R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \rightarrow B\, y\, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A\, y\, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \rightarrow B)$
R4. $C \vee A \Rightarrow C \vee LA$
R5. $C \vee \neg A \Rightarrow C \vee \neg MA$

Procedemos con EF4-Ł (II):
Partimos de EF4-Ł (I):
A1. $A \rightarrow A$
A2. $A \wedge B \rightarrow .A / A \wedge B \rightarrow .B$
A3. $A \rightarrow .A \vee B / B \rightarrow .A \vee B$
A4. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow .A \rightarrow (B \wedge C)$
A5. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow .(A \vee B) \rightarrow C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \rightarrow B \rightarrow .(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
A8. $A \rightarrow B \rightarrow .(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$
A9. $A \rightarrow \neg B \rightarrow .B \rightarrow \neg A$
A10. $\neg\neg A \rightarrow A$
A11. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow .A \rightarrow B$
A12. $[(A \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow B)] \rightarrow C \rightarrow .C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)$
A14. $B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow .\neg B$
A15. $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow .A \vee \neg B$
A16. $LA \rightarrow A$
A17. $\neg LA \wedge A \rightarrow .\neg A$
A18. $\neg LA \vee A$
A19. $MA \wedge \neg A \rightarrow .A$
A20. $A \rightarrow MA$
A21. $\neg A \vee MA$
R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \rightarrow B\, y\, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A\, y\, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \rightarrow B)$
R4. $C \vee A \Rightarrow C \vee LA$

R5. $C \vee \neg A \Rightarrow C \vee \neg MA$

Desde esta axiomatización eliminamos las tesis y las reglas relacionadas con la posibilidad, debido a que estas, gracias a la interdefinición, se pueden derivar del resto de la axiomatización. Obtenemos así la axiomatización definitiva:

A1. $A \to A$

A2. $A \wedge B \to .A/A \wedge B \to .B$

A3. $A \to .A \vee B/B \to .A \vee B$

A4. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to .A \to (B \wedge C)$

A5. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to .(A \vee B) \to C$

A6. $A \wedge (B \vee C) \to .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A7. $A \to B \to .(B \to C) \to (A \to C)$

A8. $A \to B \to .(C \to A) \to (C \to B)$

A9. $A \to \neg B \to .B \to \neg A$

A10. $\neg\neg A \to A$

A11. $A \to (A \to B) \to .A \to B$

A12. $[(A \to A) \wedge (B \to B)] \to C \to .C$

A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$

A14. $B \wedge \neg (A \to B) \to .\neg B$

A15. $\neg (A \to B) \to .A \vee \neg B$

A16. $LA \to A$

A17. $\neg LA \wedge A \to .\neg A$

A18. $\neg LA \vee A$

R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$

R2. $A \to B\, y\, A \Rightarrow B$

R3. $C \vee A\, y\, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \to B)$

R4. $C \vee A \Rightarrow C \vee LA$

Continuamos con EF4-Ł (III):

Al igual que hemos hecho para EF4-Ł (II), partimos de la axiomatización de EF4-Ł (I):

A1. $A \to A$

A2. $A \wedge B \to .A/A \wedge B \to .B$

A3. $A \to .A \vee B/B \to .A \vee B$

A4. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to .A \to (B \wedge C)$

A5. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to .(A \vee B) \to C$

A6. $A \wedge (B \vee C) \to .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A7. $A \to B \to .(B \to C) \to (A \to C)$

A8. $A \to B \to .(C \to A) \to (C \to B)$

A9. $A \to \neg B \to .B \to \neg A$

A10. $\neg\neg A \to A$

A11. $A \to (A \to B) \to .A \to B$

A12. $[(A \to A) \wedge (B \to B)] \to C \to .C$

A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$

A14. $B \wedge \neg (A \to B) \to .\neg B$

A15. $\neg (A \to B) \to .A \vee \neg B$

A16. $LA \to A$
A17. $\neg LA \wedge A \to .\neg A$
A18. $\neg LA \vee A$
A19. $MA \wedge \neg A \to .A$
A20. $A \to MA$
A21. $\neg A \vee MA$
R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \to B\, y\, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A\, y\, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \to B)$
R4. $C \vee A \Rightarrow C \vee LA$
R5. $C \vee \neg A \Rightarrow C \vee \neg MA$

Y en este caso eliminamos los teoremas y reglas en los que está integrada la necesidad, ya que estas son derivables por interdefinición desde las tesis de la posibilidad:
A1. $A \to A$
A2. $A \wedge B \to .A / A \wedge B \to .B$
A3. $A \to .A \vee B / B \to .A \vee B$
A4. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to .A \to (B \wedge C)$
A5. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to .(A \vee B) \to C$
A6. $A \wedge (B \vee C) \to .(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \to B \to .(B \to C) \to (A \to C)$
A8. $A \to B \to .(C \to A) \to (C \to B)$
A9. $A \to \neg B \to .B \to \neg A$
A10. $\neg\neg A \to A$
A11. $A \to (A \to B) \to .A \to B$
A12. $[(A \to A) \wedge (B \to B)] \to C \to .C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$
A14. $B \wedge \neg (A \to B) \to .\neg B$
A15. $\neg (A \to B) \to .A \vee \neg B$
A17. $MA \wedge \neg A \to .A$
A18. $A \to MA$
A19. $\neg A \vee MA$
R1. $A\, y\, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \to B\, y\, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A\, y\, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \to B)$
R4. $C \vee \neg A \Rightarrow C \vee \neg MA$

El último caso se corresponde con EF4-Ł (IV):
En este caso, la axiomatización es idéntica a EF4, ya que los operadores modales son obtenibles por interdefinición:
A1. $A \to A$
A2. $A \wedge B \to .A / A \wedge B \to .B$
A3. $A \to .A \vee B / B \to .A \vee B$
A4. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to .A \to (B \wedge C)$
A5. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to .(A \vee B) \to C$

A6. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow \mathbf{.}\, (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A7. $A \rightarrow B \rightarrow \mathbf{.}\, (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
A8. $A \rightarrow B \rightarrow \mathbf{.}\, (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$
A9. $A \rightarrow \neg B \rightarrow \mathbf{.} B \rightarrow \neg A$
A10. $\neg\neg A \rightarrow A$
A11. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow \mathbf{.} A \rightarrow B$
A12. $[(A \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow B)] \rightarrow C \rightarrow \mathbf{.} C$
A13. $(A \vee \neg B) \vee (A \rightarrow B)$
A14. $B \wedge \neg (A \rightarrow B) \rightarrow \mathbf{.} \neg B$
A15. $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow \mathbf{.} A \vee \neg B$
R1. $A \, y \, B \Rightarrow A \wedge B$
R2. $A \rightarrow B \, y \, A \Rightarrow B$
R3. $C \vee A \, y \, C \vee \neg B \Rightarrow C \vee \neg (A \rightarrow B)$

Índice de ítems